

(1)

「 $\overline{OA} \cdot \overline{OP} < 1 \Leftrightarrow$ 点 A が領域 D_p に含まれる」を示す。まず「 $\overline{OA} \cdot \overline{OP} < 1 \Rightarrow$ 点 A が領域 D_p に含まれる」を示す。

[1] $\overline{OA} \cdot \overline{OP} \leq 0$ のとき

$$\overline{OA} \cdot \overline{OP} = OA \cdot OP \cos \angle AOP, \quad OA > 0, OP = 1 \text{ より}$$

$$\cos \angle AOP \leq 0$$

$$\therefore 90^\circ \leq \angle AOP \leq 180^\circ$$

となる。よって半直線 OA と直線 L_p は交わらないため点 A は領域 D_p 内に含まれる。

[2] $0 < \overline{OA} \cdot \overline{OP} < 1$ のとき

$$\overline{OA} \cdot \overline{OP} = OA \cdot OP \cos \angle AOP, \quad OA > 0, OP = 1 \text{ より}$$

$$0 < OA \cos \angle AOP < 1$$

$$\therefore 0 < \cos \angle AOP \leq 1$$

となる。 $\cos \angle AOP = 1$ のときは $\angle AOP = 0^\circ$ かつ $0 < OA < 1$ となるから、点 A は端点 O, P を除く線分 OP 上にあり、領域 D_p に含まれる。一方で $0 < \cos \angle AOP < 1$ のときは

$$0^\circ < \angle AOP < 90^\circ$$

となる。ここで点 A から直線 OP へおろした垂線の足を点 H とすると、

$$OA \cos \angle AOP = OH$$

となるから、 $0 < OH < 1$ だと分かる。OP = 1 および点 O, P, H は一直線上にあることから、点 H が線分 OP 上に存在することが分かる。よって、直線 L_p と直線 AH は平行であるから、点 H および点 A は領域 D_p 内に含まれることが示された。

以上, [1], [2] より, 「 $\overline{OA} \cdot \overline{OP} < 1 \Rightarrow$ 点 A が領域 D_p に含まれる」が示された。

次に「 $\overline{OA} \cdot \overline{OP} < 1 \Leftarrow$ 点 A が領域 D_p に含まれる」を示す。原点 O を通り、直線 L_p に平行な直線を L_0 とする。また直線 L_0 が分割する座標平面のち点 P を含まないほうの領域を D_0 とする。ただし、領域 D_0 に境界が含まれるとする。点 A が領域 D_p に含まれるときのうち、領域 D_0 に含まれるときと含まれないときで場合分けする。

[1] 点 A が領域 D_0 に含まれるとき

このとき、 $90^\circ \leq \angle AOP \leq 180^\circ$ となる。よって $\cos \angle AOP \leq 0$ となり、OP = 1, OA > 0, $\overline{OA} \cdot \overline{OP} = OA \cdot OP \cos \angle AOP$ より、 $\overline{OA} \cdot \overline{OP} \leq 0$ となる。

[2] 点 A が領域 D_0 に含まれてないとき

このとき、 $0^\circ \leq \angle AOP < 90^\circ$ である。 $\angle AOP = 0^\circ$ のとき、点 A は端点 O, P を除く線分 OP 上にあることから、 $0 < OA < 1$ となる。したがって、OP = 1 かつ $\cos \angle AOP = 1$ より $0 < \overline{OA} \cdot \overline{OP} < 1$ となる。一方で $0^\circ < \angle AOP < 90^\circ$ のとき、点 A から線分 OP におろした垂線の足を点 H とすると、 $OH = OA \cos \angle AOP$ となる。点 H が線分 OP 上にあることから、 $0 < OH < 1$ となる。よって $0 < OA \cos \angle AOP < 1$ となる。ここで OP = 1 より、 $0 < OA \cdot OP \cos \angle AOP < 1$, つまり $0 < \overline{OA} \cdot \overline{OP} < 1$ となる。

以上, [1], [2] より, 「 $\overline{OA} \cdot \overline{OP} < 1 \Leftarrow$ 点 A が領域 D_p に含まれる」が示された。これにより必要条件および十分条件がともに示されたため、 $\overline{OA} \cdot \overline{OP} < 1$ は、点 A が領域 D_p に含まれるための必要十分条件であることが示された。

(証明終)

(2)

$x = k$ における 2 次関数 $y = \frac{1}{4a}(x-a)^2$ 上の点を点 Q とすると、その座標は $\left(k, \frac{1}{4a}(k-a)^2\right)$ と

なる。よって $\overline{OQ} = \left(k, \frac{1}{4a}(k-a)^2\right)$ となる。点 Q がいずれの実数 k においても領域 D_p に含まれる条件は(1)より、 $\overline{OQ} \cdot \overline{OP} < 1$ となることである。つまり

$$\overline{OQ} \cdot \overline{OP} < 1$$

$$\Leftrightarrow \left(k, \frac{1}{4a}(k-a)^2\right) \cdot (a, b) < 1$$

$$\Leftrightarrow ak + \frac{b}{4a}(k-a)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{4a}k^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)k + \frac{ab}{4} - 1 < 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たすとき、点 Q は領域 D_p に含まれる。 $b = 0$ のとき①は $ak - 1 < 0$ となるが、 $k = \frac{2}{a}$ のときこの不等式は満たされないため不適となる。以下 $b \neq 0$ で考える。このとき、①は

①

$$\Leftrightarrow \frac{b}{4a} \left(k + \frac{2a^2 - ab}{b}\right)^2 - \frac{(2a^2 - ab)^2}{4ab} + \frac{ab}{4} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{4a} \left(k + \frac{2a^2 - ab}{b}\right)^2 - \frac{a^3}{b} + a^2 - 1 < 0$$

と変形できる。任意の k においてこれを満たすとき 2 次関数上の点はすべて領域 D_p に含まれることになる。ここで $f(k) = \frac{b}{4a} \left(k + \frac{2a^2 - ab}{b}\right)^2 - \frac{a^3}{b} + a^2 - 1$ とする。 $\frac{b}{4a} > 0$ のとき、 $y = f(k)$

のグラフは下向きに凸となり k が大きくなるほど $f(k)$ の値も大きくなり、 $f(k) < 0$ を満たさない k が存在する。 $\frac{b}{4a} < 0$ のとき、つまり点 P が第 2 もしくは第 4 象限にあるとき、

$y = f(k)$ のグラフは上向きに凸となる。よって $k = -\frac{2a^2 - ab}{b}$ のとき、 $f(k)$ は最大値

$f\left(-\frac{2a^2 - ab}{b}\right) = -\frac{a^3}{b} + a^2 - 1$ ととる。つまり $-\frac{a^3}{b} + a^2 - 1 < 0$ を満たすとき、点 Q は k の値によらず領域 D_p に含まれる。ここで点 P は単位円上の点であるため、 $a^2 + b^2 = 1$ を満たす。よって $-\frac{a^3}{b} + a^2 - 1 < 0$ を変形すると、

$$-\frac{a^3}{b} + a^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a^3}{b} + 1 - b^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a^3}{b} < b^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで $b > 0$ のとき、②は

$$-a^3 < b^3$$

$$\Leftrightarrow 0 < (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 < (a+b) \left\{ \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \right\}$$

$$\therefore b > -a$$

と変形できる。また $b < 0$ のとき、②は

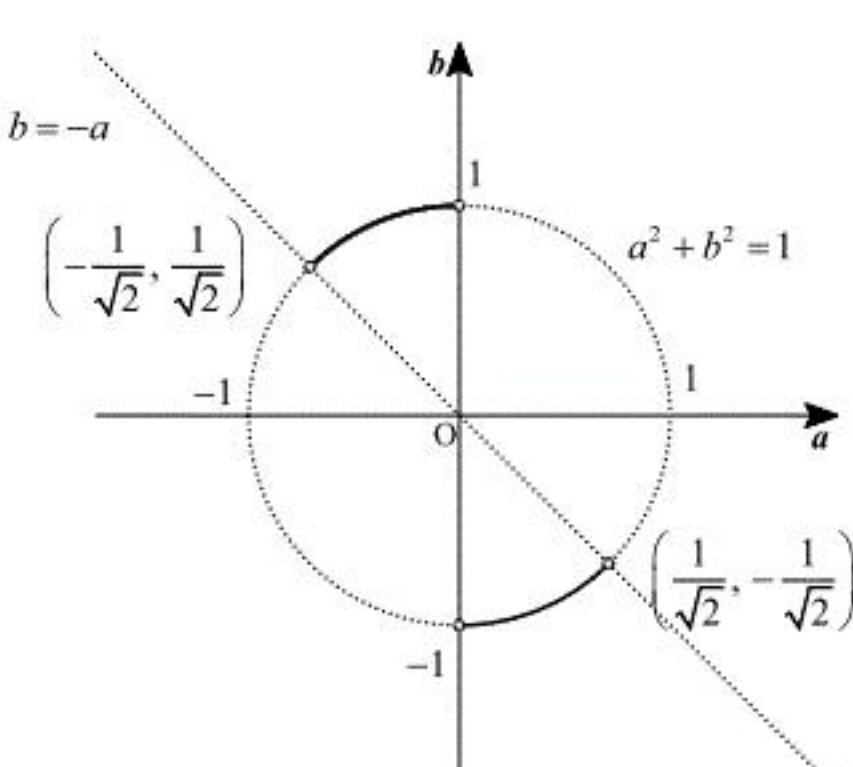
$$-a^3 > b^3$$

$$\Leftrightarrow 0 > (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 > (a+b) \left\{ \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \right\}$$

$$\therefore b < -a$$

と変形できる。よって単位円上において $b > 0, b > -a$ または $b < 0, b < -a$ のとき 2 次関数のグラフ上のすべての点がすべて領域 D_p に含まれる。これを図示すると以下の図の実線部のようになる。



(答) $b > 0, b > -a$ または $b < 0, b < -a$, 図: 前述のグラフの実線部

(1)

$x^2 - 2bx + c = 0$ の解は $b \pm \sqrt{b^2 - c}$ である。これが異なる 2 つの整数解となるのは $b^2 - c > 0$ であり、 $\sqrt{b^2 - c}$ が整数となるときである。つまり $\sqrt{b^2 - c} = k$ (k は自然数), すなわち $b^2 - c = k^2$ となる k が存在するときに c は A の要素となる。また c は正の整数であり、 $b^2 - c > 0$ より $b^2 > 0$ となる。この条件においては b の正負は関係しないため、本問では $b > 0$ として扱う。ここで $b^2 - c = k^2$ を変形することで、

$$\begin{aligned} b^2 - c &= k^2 \\ \Leftrightarrow b^2 - k^2 &= c \\ \Leftrightarrow (b-k)(b+k) &= c \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が得られる。 $c > 0, b > 0, k > 0$ より、 $b+k > 0$ であり $b-k > 0$ となる。また b, k ともに自然数であるため、 $b-k, b+k$ ともに自然数となり、 $b-k < b+k$ である。この条件の下で①を満たす (b, k) の組が存在するか調べる。

$c=1$ のとき、 $b-k=b+k=1$ となるが、 $b-k < b+k$ に矛盾するため、 $1 \notin A$ となる。

$c=2$ のとき、 $(b-k, b+k) = (1, 2)$ となる。よって $(b, k) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となるが、 b, k が自然数であることに反するため、 $2 \notin A$ となる。

(証明終)

(2)

$c=3$ のとき、 $(b-k, b+k) = (1, 3)$ となる。よって $(b, k) = (2, 1)$ となり、 $3 \in A$ となる。つまり A の要素のうち最小の数が 3 であるから、 $c_1 = 3$ となる。

(証明終)

(3)

$c=4$ のとき、 $b-k < b+k$ より、 $(b-k, b+k) = (1, 4)$ となる。よって $(b, k) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ となるため、 $4 \notin A$ となる。

$c=5$ のとき、 $(b-k, b+k) = (1, 5)$ となる。よって $(b, k) = (3, 2)$ となるため、 $5 \in A$ となる。つまり A の要素のうち 2 番目に小さい数が 5 であるから、 $c_2 = 5$ である。

(答) $c_2 = 5$

(4)

①を満たす $(b-k, b+k)$ の組の 1 つとして (p, q) が存在する場合を考える。ただし、 p, q は $0 < p < q < c$ かつ $pq = c$ を満たす自然数である。このとき、

$$\begin{aligned} \begin{cases} b-k=p \\ b+k=q \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{q+p}{2} \\ k=\frac{q-p}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} &b, k \text{ がともに自然数である} \\ \Leftrightarrow &q+p \text{ と } q-p \text{ がともに偶数となる} \\ \Leftrightarrow &p, q \text{ の偶奇が一致する} \end{aligned}$$

という条件を満たせばよい。 p, q の偶奇が一致するとき、 $c = pq$ は 4 の倍数または奇数となる。逆に、 $c \geq 5$ の場合、

$$c \text{ が 4 の倍数のとき } (p, q) = \left(2, \frac{c}{2}\right) \Leftrightarrow (b, k) = \left(\frac{c}{4}+1, \frac{c}{4}-1\right)$$

$$c \text{ が奇数のとき } (p, q) = (1, c) \Leftrightarrow (b, k) = \left(\frac{c+1}{2}, \frac{c-1}{2}\right)$$

とすれば、①を満たす (b, k) が存在することがわかる。 $c_1 = 3, c_2 = 5$ であるから、以上の議論より、 $c = 4m + n$ (m は自然数、 n は $-1, 0, 1$ のいずれかの整数、 $c \neq 4$) のとき A の要素となることが表すことができる。よって $m=11, n=-1$ のときが 30 番目の要素となり、つまり $c_{30} = 4 \cdot 11 - 1 = 43$ となる。

(答) $c_{30} = 43$

(1)

$f(x)=x^3+ax^2$ として、 $f(x)=-b$ を満たす解の個数を考える。これは $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=-b$ との共有点の個数に等しい。 $f(x)$ を x で微分すると、

$$f'(x)=3x^2+2ax$$

となる。 a の値によって場合分けをする。

[1] $a>0$ のとき

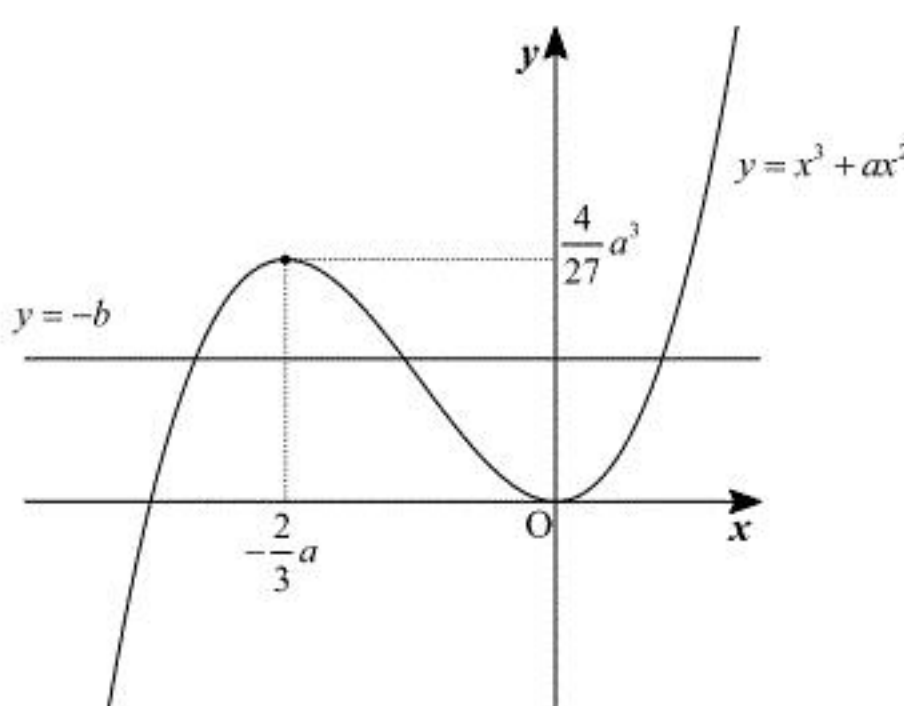
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2+2ax \\ &= x(3x+2a) \end{aligned}$$

より、極値をとる x の値は $f'(x)=0$ を解いて $x=0$ 、または $x=-\frac{2}{3}a(<0)$ 、となる。よ

って $f(x)=x^3+ax^2$ の増減表は以下の通りとなる。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、 $y=f(x)$ のグラフは以下のように描ける。



よってグラフより、 $y=f(x)$ と $y=-b$ の共有点の個数は

$$1 \text{ 個} \quad (b < -\frac{4}{27}a^3 \text{ または } b > 0 \text{ のとき})$$

$$2 \text{ 個} \quad (b = -\frac{4}{27}a^3 \text{ または } b = 0 \text{ のとき})$$

$$3 \text{ 個} \quad (-\frac{4}{27}a^3 < b < 0 \text{ のとき})$$

となる。

[2] $a=0$ のとき

このとき $f(x)=x^3$ となり単調増加となる。よって $f(x)=-b$ となる x はただ1つだけ存在する。つまり $a=0$ のとき実数解は1つとなる。

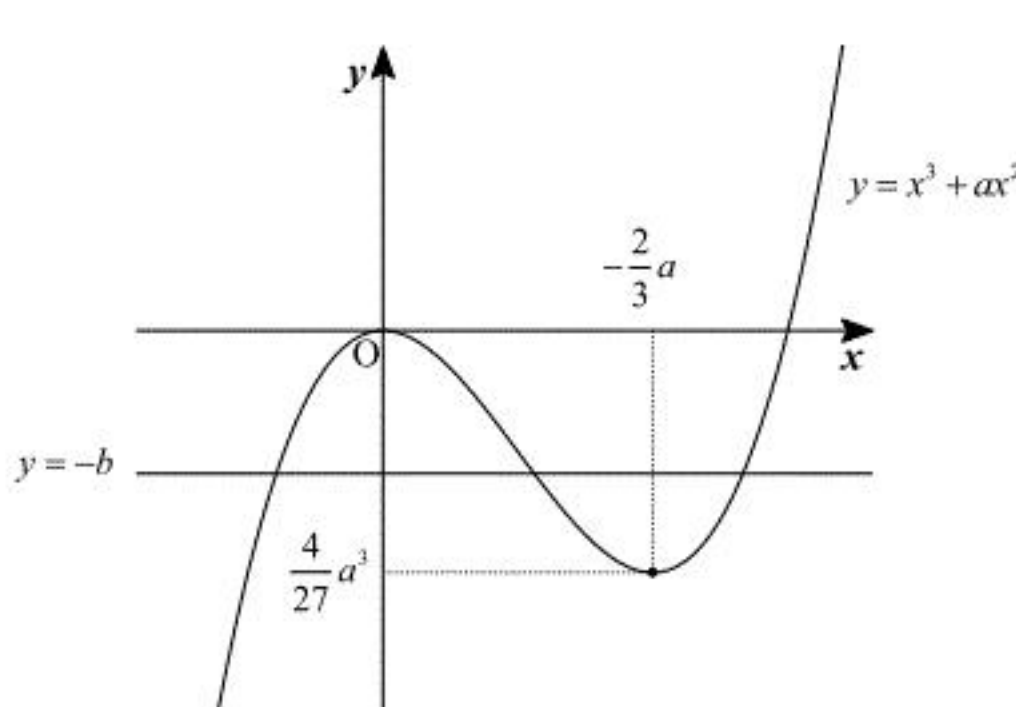
[3] $a<0$ のとき

$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$ より、極値をとる x の値は $f'(x)=0$ を解いて $x=0$ または

$x=-\frac{2}{3}a(>0)$ となる。よって $f(x)=x^3+ax^2$ の増減表は以下の通りとなる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より、 $y=f(x)$ のグラフは以下のように描ける。



よってグラフより、 $y=f(x)$ と $y=-b$ の共有点の個数は

$$1 \text{ 個} \quad (b > -\frac{4}{27}a^3, \text{ または } b < 0 \text{ のとき})$$

$$2 \text{ 個} \quad (b = -\frac{4}{27}a^3, \text{ または } b = 0 \text{ のとき})$$

$$3 \text{ 個} \quad (0 < b < -\frac{4}{27}a^3 \text{ のとき})$$

となる。

以上、[1], [2], [3]より、 a, b の値による $x^3+ax^2+b=0$ の解の個数が求められた。

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 個} \quad (b < -\frac{4}{27}a^3 \text{ または } b > 0 \text{ のとき}) \\ 2 \text{ 個} \quad (b = -\frac{4}{27}a^3 \text{ または } b = 0 \text{ のとき}) \\ 3 \text{ 個} \quad (-\frac{4}{27}a^3 < b < 0 \text{ のとき}) \end{array} \right. \\ \text{(答)} \quad a = 0 \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 個} \\ \end{array} \right. \\ a < 0 \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ 個} \quad (b > -\frac{4}{27}a^3 \text{ または } b < 0 \text{ のとき}) \\ 2 \text{ 個} \quad (b = -\frac{4}{27}a^3 \text{ または } b = 0 \text{ のとき}) \\ 3 \text{ 個} \quad (0 < b < -\frac{4}{27}a^3 \text{ のとき}) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

(2)

方程式(A)が実数解を3つもつため、(1)の結果より、 $a>0, -\frac{4}{27}a^3 < b < 0$ または

$a<0, 0 < b < -\frac{4}{27}a^3$ のいずれかとなる。また不等式 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) < 0$ は

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma + 1 < 0$$

と変形することができる。ここで方程式(A)において3次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = -b \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = -a \end{cases}$$

となる。これを $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma + 1 < 0$ に代入することで

$$-a-b+1 < 0$$

$$\therefore b > -a+1$$

となる。したがって、求める (a, b) の存在範囲は $a>0, -\frac{4}{27}a^3 < b < 0, b > -a+1$ 、または

$a<0, 0 < b < -\frac{4}{27}a^3, b > -a+1$ となる。ここで、境界線 $b = -\frac{4}{27}a^3, b = -a+1$ の共有点は

$$-\frac{4}{27}a^3 = -a+1$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 - 27a + 27 = 0$$

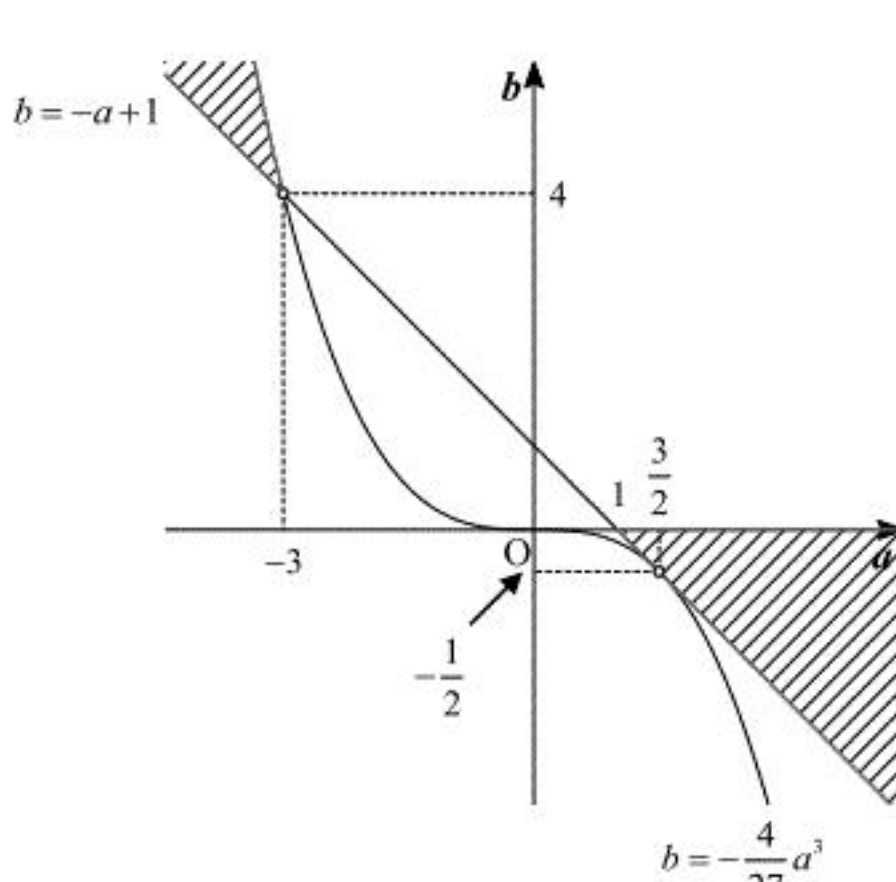
$$\Leftrightarrow (a+3)(4a^2 - 12a + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+3)(2a-3)^2 = 0$$

$$\therefore a = -3, \frac{3}{2}$$

より、 $(-3, 4), (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ の2点となる。よって、点 (a, b) の存在範囲を図示すると以下のよう

になる。ただし、境界線は含まれない。



(答) $a>0, -\frac{4}{27}a^3 < b < 0, b > -a+1$ または $a<0, 0 < b < -\frac{4}{27}a^3, b > -a+1$, 図：前述