

(1)

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OP}} &= (\overline{\mathrm{PA}} - \overline{\mathrm{PO}}) \cdot (-\overline{\mathrm{PO}}) \\ &= |\overline{\mathrm{PO}}|^2 - \overline{\mathrm{PO}} \cdot \overline{\mathrm{PA}} \\ &= 1 - \overline{\mathrm{PO}} \cdot \overline{\mathrm{PA}} \quad (\because |\overline{\mathrm{PO}}| = 1)\end{aligned}$$

である。 $\overline{\mathrm{PA}} = \vec{0}$ 、つまり 2 点 P, A が一致するとき、 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OP}} = 1$ であり、点 A は D_p に含まれない。 $\overline{\mathrm{PA}} \neq \vec{0}$ のとき

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PO}} \cdot \overline{\mathrm{PA}} &= |\overline{\mathrm{PO}}| |\overline{\mathrm{PA}}| \cos \angle \mathrm{OPA} \\ &= |\overline{\mathrm{PA}}| \cos \angle \mathrm{OPA} \quad (\because |\overline{\mathrm{PO}}| = 1)\end{aligned}$$

となり、 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OP}} = 1 - |\overline{\mathrm{PA}}| \cos \angle \mathrm{OPA}$ である。 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OP}} < 1$ ならば

$$\begin{aligned}1 - |\overline{\mathrm{PA}}| \cos \angle \mathrm{OPA} &< 1 \\ \Leftrightarrow |\overline{\mathrm{PA}}| \cos \angle \mathrm{OPA} &> 0\end{aligned}$$

である。 $|\overline{\mathrm{PA}}| > 0$ より $\cos \angle \mathrm{OPA} > 0$ となるから、 $0 < \angle \mathrm{OPA} < \frac{\pi}{2}$ となる。 $\mathrm{PO} \perp L_p$ より点 A は

D_p に含まれる。逆に、点 A が D_p に含まれるならば $\overline{\mathrm{PA}} \neq \vec{0}$ であり、 $0 < \angle \mathrm{OPA} < \frac{\pi}{2}$ より

$\cos \angle \mathrm{OPA} > 0$ となるから、 $|\overline{\mathrm{PA}}| \cos \angle \mathrm{OPA} > 0$ となる。よって、 $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OP}} < 1$ となる。したがって、

$\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OP}} < 1$ は、点 A が領域 D_p に含まれるための必要十分条件であることが示された。

(証明終)

(2)

$x = k$ における 2 次関数 $y = \frac{1}{4a}(x-a)^2$ 上の点を点 Q とすると、その座標は $\left(k, \frac{1}{4a}(k-a)^2\right)$ と

なる。よって $\overline{\mathrm{OQ}} = \left(k, \frac{1}{4a}(k-a)^2\right)$ となる。点 Q がいずれの実数 k においても領域 D_p に含ま

れる条件は(1)より、 $\overline{\mathrm{OQ}} \cdot \overline{\mathrm{OP}} < 1$ となることである。つまり

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OQ}} \cdot \overline{\mathrm{OP}} &< 1 \\ \Leftrightarrow \left(k, \frac{1}{4a}(k-a)^2\right) \cdot (a, b) &< 1 \\ \Leftrightarrow ak + \frac{b}{4a}(k-a)^2 &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{b}{4a}k^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)k + \frac{ab}{4} - 1 &< 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

を満たすとき、点 Q は領域 D_p に含まれる。 $b = 0$ のとき①は $ak - 1 < 0$ となるが、 $k = \frac{2}{a}$ のと

きこの不等式は満たされないため不適となる。以下 $b \neq 0$ で考える。このとき、①は

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad &\Leftrightarrow \frac{b}{4a} \left(k + \frac{2a^2 - ab}{b}\right)^2 - \frac{(2a^2 - ab)^2}{4ab} + \frac{ab}{4} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{b}{4a} \left(k + \frac{2a^2 - ab}{b}\right)^2 - \frac{a^3}{b} + a^2 - 1 < 0\end{aligned}$$

と変形できる。任意の k においてこれを満たすとき 2 次関数上の点はすべて領域 D_p に含まれ

ることになる。ここで $f(k) = \frac{b}{4a} \left(k + \frac{2a^2 - ab}{b}\right)^2 - \frac{a^3}{b} + a^2 - 1$ とする。 $\frac{b}{4a} > 0$ のとき、 $y = f(k)$

のグラフは下向きに凸となり k が大きくなるほど $f(k)$ の値も大きくなり、 $f(k) < 0$ を満た

さない k が存在する。 $\frac{b}{4a} < 0$ のとき、つまり点 P が第 2 もしくは第 4 象限にあるとき、

$y = f(k)$ のグラフは上向きに凸となる。よって $k = -\frac{2a^2 - ab}{b}$ のとき、 $f(k)$ は最大値

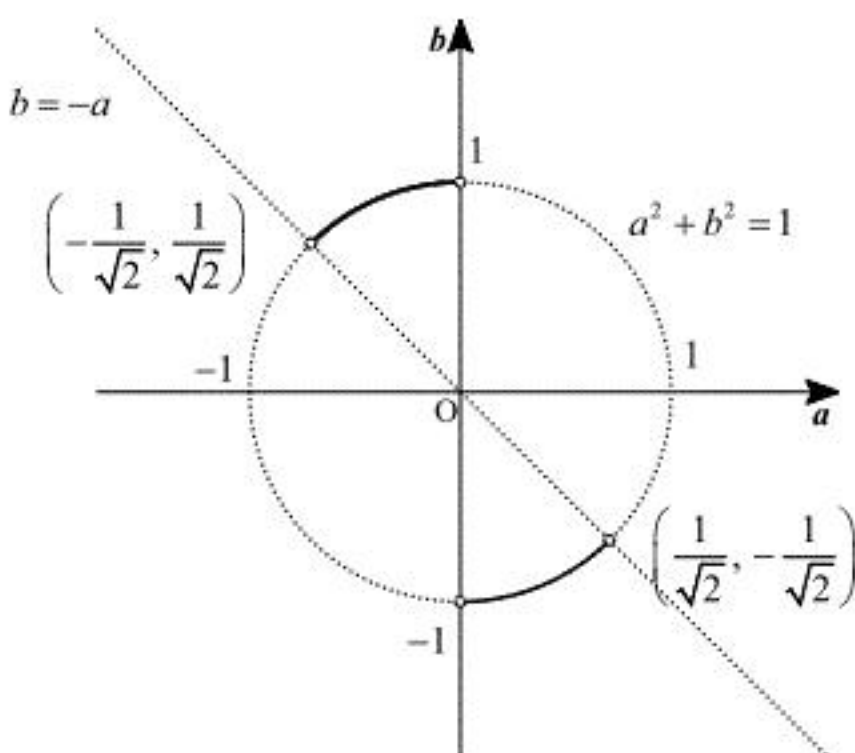
$f\left(-\frac{2a^2 - ab}{b}\right) = -\frac{a^3}{b} + a^2 - 1$ をとる。つまり $-\frac{a^3}{b} + a^2 - 1 < 0$ を満たすとき、点 Q は k の値によ

らず領域 D_p に含まれる。ここで点 P は単位円上の点であるため、 $a^2 + b^2 = 1$ を満たす。よっ

て $-\frac{a^3}{b} + a^2 - 1 < 0$ を変形すると、

$$\begin{aligned}-\frac{a^3}{b} + a^2 - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{a^3}{b} - b^2 &< 0 \quad (\because a^2 + b^2 = 1) \\ \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{b} &> 0 \\ \Leftrightarrow b(a+b)(a^2 - ab + b^2) &> 0 \quad (\because b^2 > 0) \\ \Leftrightarrow b(a+b) \left\{ \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \right\} &> 0 \\ \Leftrightarrow b(a+b) &> 0\end{aligned}$$

と変形できる。よって単位円上において $b > 0, b > -a$ または $b < 0, b < -a$ のとき 2 次関数のグラフ上のすべての点がすべて領域 D_p に含まれる。これを図示すると以下の図の実線部のようになる。



(答) $a^2 + b^2 = 1$ ($b > 0, b > -a$ または $b < 0, b < -a$), 図: 前述のグラフの実線部

(1)

$x^2 - 2bx + c = 0$ の解は $b \pm \sqrt{b^2 - c}$ である。これが異なる 2 つの整数解となるのは $b^2 - c > 0$ であり、 $\sqrt{b^2 - c}$ が整数となるときである。つまり $\sqrt{b^2 - c} = k$ (k は自然数)、すなわち $b^2 - c = k^2$ となる k が存在するときに c は A の要素となる。また c は正の整数であり、 $b^2 - c > 0$ より $b^2 > 0$ となる。この条件においては b の正負は関係しないため、本問では $b > 0$ として扱う。ここで $b^2 - c = k^2$ を変形することで、

$$\begin{aligned} b^2 - c &= k^2 \\ \Leftrightarrow b^2 - k^2 &= c \\ \Leftrightarrow (b-k)(b+k) &= c \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が得られる。 $c > 0, b > 0, k > 0$ より、 $b+k > 0$ であり $b-k > 0$ となる。また b, k ともに自然数であるため、 $b-k, b+k$ ともに自然数となり、 $b-k < b+k$ である。この条件の下で①を満たす (b, k) の組が存在するか調べる。

$c=1$ のとき、 $b-k=b+k=1$ となるが、 $b-k < b+k$ に矛盾するため、 $1 \notin A$ となる。

$c=2$ のとき、 $(b-k, b+k) = (1, 2)$ となる。よって $(b, k) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となるが、 b, k が自然数であることに反するため、 $2 \notin A$ となる。

(証明終)

(2)

$c=3$ のとき、 $(b-k, b+k) = (1, 3)$ となる。よって $(b, k) = (2, 1)$ となり、 $3 \in A$ となる。つまり A の要素のうち最小の数が 3 であるから、 $c_1 = 3$ となる。

(証明終)

(3)

$c=4$ のとき、 $b-k < b+k$ より、 $(b-k, b+k) = (1, 4)$ となる。よって $(b, k) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ となるため、 $4 \notin A$ となる。

$c=5$ のとき、 $(b-k, b+k) = (1, 5)$ となる。よって $(b, k) = (3, 2)$ となるため、 $5 \in A$ となる。つまり A の要素のうち 2 番目に小さい数が 5 であるから、 $c_2 = 5$ である。

(答) $c_2 = 5$

(4)

①を満たす $(b-k, b+k)$ の組の 1 つとして (p, q) が存在する場合を考える。ただし、 p, q は $0 < p < q < c$ かつ $pq = c$ を満たす自然数である。このとき、

$$\begin{aligned} \begin{cases} b-k=p \\ b+k=q \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{q+p}{2} \\ k=\frac{q-p}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} &b, k \text{ がともに自然数である} \\ \Leftrightarrow &q+p \text{ と } q-p \text{ がともに偶数となる} \\ \Leftrightarrow &p, q \text{ の偶奇が一致する} \end{aligned}$$

という条件を満たせばよい。 p, q の偶奇が一致するとき、 $c = pq$ は 4 の倍数または奇数となる。逆に、 $c \geq 5$ の場合、

$$c \text{ が 4 の倍数のとき } (p, q) = \left(2, \frac{c}{2}\right) \Leftrightarrow (b, k) = \left(\frac{c}{4}+1, \frac{c}{4}-1\right)$$

$$c \text{ が奇数のとき } (p, q) = (1, c) \Leftrightarrow (b, k) = \left(\frac{c+1}{2}, \frac{c-1}{2}\right)$$

とすれば、①を満たす (b, k) が存在することがわかる。 $c_1 = 3, c_2 = 5$ であるから、以上の議論より、 $c = 4m + n$ (m は自然数、 n は $-1, 0, 1$ のいずれかの整数、 $c \neq 4$) のとき A の要素となることが表すことができる。よって $m = 34, n = 0$ のときが 100 番目の要素となり、つまり $c_{100} = 4 \cdot 34 = 136$ となる。

(答) $c_{100} = 136$

$xt = \theta$ とおくと、 $xdt = d\theta$ であり、 t と θ の対応関係は以下ようになる。

t	0	$\rightarrow$	2π
θ	0	$\rightarrow$	$2\pi x$

よって、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{2\pi} (xt)^2 \sin(xt) \cdot xdt \\ &= \int_0^{2\pi x} \theta^2 \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\pi x)^2 \sin(2\pi x) \cdot 2\pi \\ &= 8\pi^3 x^2 \sin(2\pi x) \end{aligned}$$

となる。 $-10 \leq x \leq 10$ において $f'(x) = 0$ となる x の値は、

$$x = \frac{k}{2} \quad (k \text{ は整数であり, } -20 \leq k \leq 20)$$

であり、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{2}\right) &= \int_0^{k\pi} \theta^2 \sin \theta d\theta \\ &= \left[-\theta^2 \cos \theta\right]_0^{k\pi} + \int_0^{k\pi} 2\theta \cos \theta d\theta \\ &= -k^2 \pi^2 \cos k\pi + \left[2\theta \sin \theta\right]_0^{k\pi} - \int_0^{k\pi} 2 \sin \theta d\theta \\ &= -k^2 \pi^2 \cos k\pi + \left[2 \cos \theta\right]_0^{k\pi} \\ &= -k^2 \pi^2 \cos k\pi + 2 \cos k\pi - 2 \\ &= (2 - k^2 \pi^2)(-1)^k - 2 \\ &= (k^2 \pi^2 - 2)(-1)^{k+1} - 2 \end{aligned}$$

となる。よって、 $n \leq x \leq n+1$ (n は整数であり、 $-10 \leq n \leq 9$) における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	n	$\cdots$	$n + \frac{1}{2}$	$\cdots$	$n+1$
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$		$\nearrow$	$\pi^2(2n+1)^2 - 4$	$\searrow$	

したがって、 $-10 \leq x \leq 10$ において $f(x)$ が最大となるのは $\pi^2(2n+1)^2 - 4$ が最大となるときである。これを n の2次関数としてみたとき、下向きに凸となる。よって $n = -10$ 、または $n = 9$ のときに、

$$f\left(-\frac{19}{2}\right) = f\left(\frac{19}{2}\right) = 361\pi^2 - 4$$

となり、 $f(x)$ は最大となる。

(答) $x = -\frac{19}{2}, \frac{19}{2}$