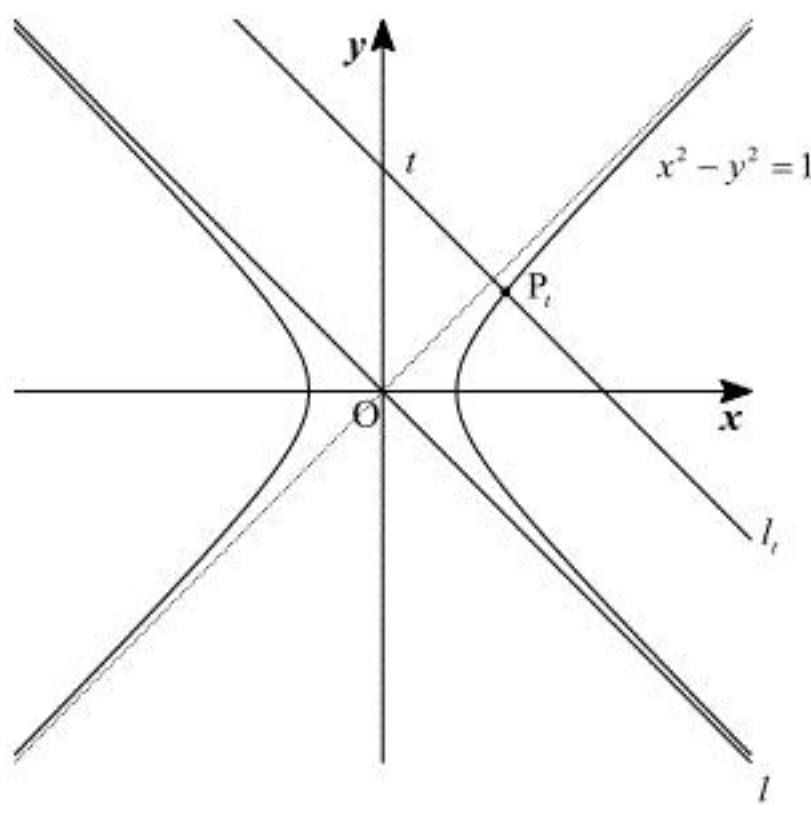


1

(1)



双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の漸近線の傾きは、 $\pm \frac{1}{1} = \pm 1$ となる。直線 l の傾きは負であるため -1 となる。

これが原点を通るため、直線 l の方程式は $y = -x$ となる。

(答) $y = -x$

(2)

直線 l_t の傾きは -1 であり、 $(0, t)$ を通るため、直線 l_t の方程式は、

$$y = -x + t$$

となる。この直線と双曲線の交点の x 座標はそれぞれの方程式を連立して y を消去すること

で、

$$\begin{aligned} x^2 - (-x + t)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x^2 + 2tx - t^2 &= 1 \\ \therefore x &= \frac{t^2 + 1}{2t} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

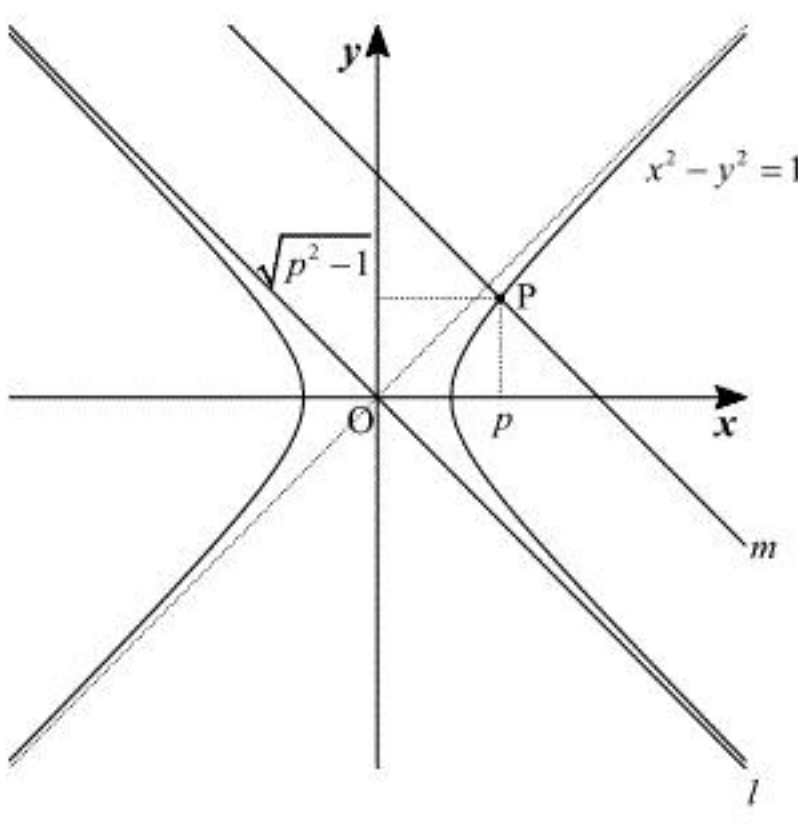
と求まる。よって交点の y 座標は、

$$y = -\frac{t^2 + 1}{2t} + t = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

となる。

(答) $\left(\frac{t^2 + 1}{2t}, \frac{t^2 - 1}{2t}\right)$

(3)(i)



点 P を通り漸近線 l に平行な直線を m とする。点 P の y 座標 y_p は

$$\begin{aligned} p^2 - y_p^2 &= 1 \\ \therefore y_p &= \sqrt{p^2 - 1} \quad (\because y > 0) \end{aligned}$$

となる。ここで直線 m は $(p, \sqrt{p^2 - 1})$ を通る傾きが -1 の直線であるため、直線 m の方程式は、

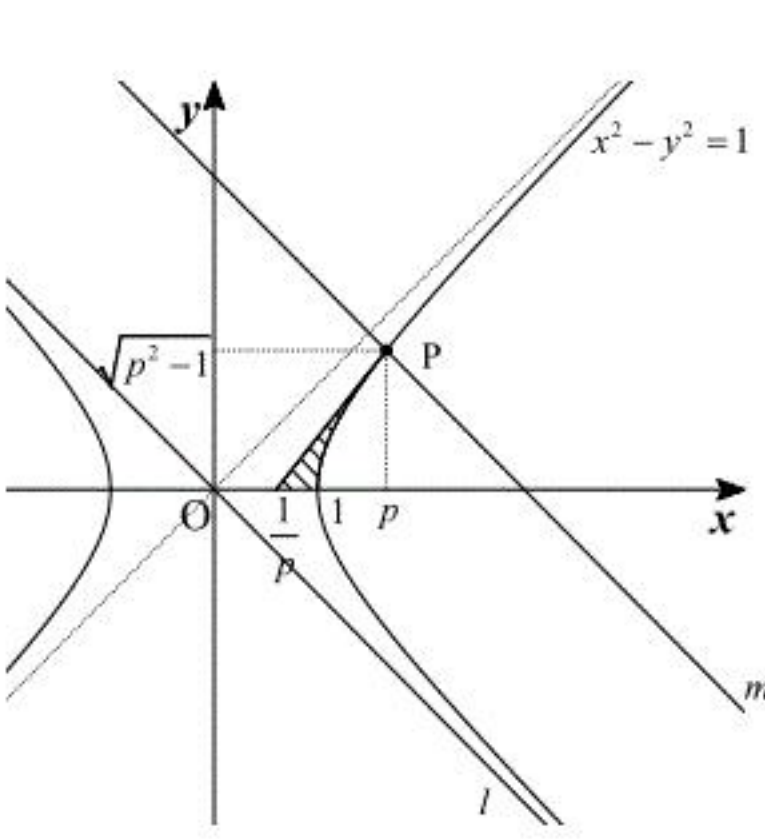
$$\begin{aligned} y - \sqrt{p^2 - 1} &= -(x - p) \\ \therefore y &= -x + p + \sqrt{p^2 - 1} \end{aligned}$$

となる。よって直線 m と y 軸の交点の y 座標は $p + \sqrt{p^2 - 1}$ となる。

(答) $p + \sqrt{p^2 - 1}$

(ii)

点 P における曲線 C の接線と x 軸と曲線 C で囲まれた図形を図示すると以下の図の斜線部となる。



双曲線 C の第1象限の部分をもとに、曲線 C_1 の方程式は $y = \sqrt{x^2 - 1} \ (x > 0)$ となる。曲線

C_1 と x 軸および $x = p$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_1^p \sqrt{x^2 - 1} dx$$

となる。ここで $k = x + \sqrt{x^2 - 1}$ とおくと、(2)と(3)(i)より、 $x = \frac{k^2 + 1}{2k} = \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{k} \right)$ となるから、

$$\frac{dx}{dk} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

となる。また x, k の対応は以下の表の通りである。

x	1	$\rightarrow$	p
k	1	$\rightarrow$	$p + \sqrt{p^2 - 1}$

よって、これらをもとに $S = \int_1^p \sqrt{x^2 - 1} dx$ を $k = x + \sqrt{x^2 - 1}$ と置換することで

$$\begin{aligned} S &= \int_1^p \sqrt{x^2 - 1} dx \\ &= \int_1^p (k - x) dx \\ &= \int_1^{p + \sqrt{p^2 - 1}} \left\{ k - \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{k} \right) \right\} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) dk \\ &= \frac{1}{4} \int_1^{p + \sqrt{p^2 - 1}} \left(k - \frac{1}{k} \right) \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) dk \\ &= \frac{1}{4} \int_1^{p + \sqrt{p^2 - 1}} \left(k - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^3} \right) dk \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} k^2 - 2 \log |k| - \frac{1}{2k^2} \right]_1^{p + \sqrt{p^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{8} \left(p + \sqrt{p^2 - 1} - \frac{1}{p + \sqrt{p^2 - 1}} \right) \left(p + \sqrt{p^2 - 1} + \frac{1}{p + \sqrt{p^2 - 1}} \right) - \frac{1}{2} \log (p + \sqrt{p^2 - 1}) \\ &= \frac{1}{8} (p + \sqrt{p^2 - 1} - p + \sqrt{p^2 - 1}) (p + \sqrt{p^2 - 1} + p - \sqrt{p^2 - 1}) - \frac{1}{2} \log (p + \sqrt{p^2 - 1}) \\ &= \frac{1}{2} p \sqrt{p^2 - 1} - \frac{1}{2} \log (p + \sqrt{p^2 - 1}) \end{aligned}$$

と求めることができる。また、点 P から x 軸におろした垂線の足を点 H とし、点 P における曲

線 C の接線と x 軸との交点を A とする。点 $P(p, \sqrt{p^2 - 1})$ における曲線 C の接線の方程式は

$$px - \sqrt{p^2 - 1}y = 1$$

となるから、点 A の座標は、 $\left(\frac{1}{p}, 0\right)$ となる。このとき $\triangle APH$ の面積は

$$\frac{1}{2} AH \cdot PH = \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) \sqrt{p^2 - 1}$$

となる。よって求める図形の面積は、

$$\frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) \sqrt{p^2 - 1} - \left\{ \frac{1}{2} p \sqrt{p^2 - 1} - \frac{1}{2} \log (p + \sqrt{p^2 - 1}) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \log (p + \sqrt{p^2 - 1}) - \frac{\sqrt{p^2 - 1}}{p} \right\}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} \left\{ \log (p + \sqrt{p^2 - 1}) - \frac{\sqrt{p^2 - 1}}{p} \right\}$

(1)

$\frac{a_n + a_{n+2} + a_{n+4}}{3} \geq \frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2} \Leftrightarrow 2(a_n + a_{n+2} + a_{n+4}) - 3(a_{n+1} + a_{n+3}) \geq 0$ を示す。数列 $\{a_n\}$ がすべて

の自然数 n について満たす $a_n + a_{n+2} \geq 2a_{n+1}$ を用いることで、

$$\begin{aligned} & 2(a_n + a_{n+2} + a_{n+4}) - 3(a_{n+1} + a_{n+3}) \\ &= 2(a_n + a_{n+2} + a_{n+2} + a_{n+4}) - 2a_{n+2} - 3(a_{n+1} + a_{n+3}) \\ &\geq 4(a_{n+1} + a_{n+3}) - 2a_{n+2} - 3(a_{n+1} + a_{n+3}) \\ &= a_{n+1} + a_{n+3} - 2a_{n+2} \\ &\geq 2a_{n+2} - 2a_{n+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。すなわち $\frac{a_n + a_{n+2} + a_{n+4}}{3} \geq \frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2}$ となり題意が示された。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を利用して、

$$\begin{aligned} \frac{a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2k}}{k+1} &\geq \frac{a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2k-1}}{k} \\ \Leftrightarrow k(a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2k}) - (k+1)(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2k-1}) &\geq 0 \quad \dots(*) \end{aligned}$$

がすべての自然数 n, k において成立することを示す。

[1] $k=1$ のとき

題意より、すべての自然数 n について $a_n + a_{n+2} \geq 2a_{n+1}$ であるから、 $k=1$ のとき $(*)$ は成立する。

[2] $k=l$ (l は自然数) のとき

$(*)$ が成立する、つまり

$$l(a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2l}) - (l+1)(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2l-1}) \geq 0$$

がすべての自然数 n で成立すると仮定する。ここで $k=l+1$ のとき、

$$\begin{aligned} & (l+1)(a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2l+2}) - (l+2)(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2l+1}) \\ &= (l+1)\{(a_n + a_{n+2}) + (a_{n+2} + a_{n+4}) + (a_{n+4} + a_{n+6}) + \cdots + (a_{n+2l} + a_{n+2l+2})\} \\ &\quad - (l+1)(a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2l}) - (l+2)(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2l+1}) \\ &\geq 2(l+1)(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2l+1}) \\ &\quad - (l+1)(a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2l}) - (l+2)(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2l+1}) \\ &= l(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2l+1}) - (l+1)(a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2l}) \end{aligned}$$

となる。仮定より、

$$l(a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2l}) - (l+1)(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2l-1}) \geq 0$$

がすべての自然数 n で成立するため、 n を $n+1$ とした

$$l(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2l+1}) - (l+1)(a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2l}) \geq 0$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned} & (l+1)(a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2l+2}) - (l+2)(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2l+1}) \\ &\geq l(a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2l+1}) - (l+1)(a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2l}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

が成立する。すなわち、 $k=l$ のとき $(*)$ が成立すると仮定することで $k=l+1$ のときに $(*)$ が成立することが示された。

以上、[1], [2] より、数学的帰納法を利用して、すべての自然数 n, k において $(*)$ が成立することが示された。よって、すべての自然数 n, k に対して不等式

$$\frac{a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \cdots + a_{n+2k}}{k+1} \geq \frac{a_{n+1} + a_{n+3} + a_{n+5} + \cdots + a_{n+2k-1}}{k}$$

が成立することが示された。

(証明終)

(1)

$$f(x \times y) = f(x) \times f(y) \quad \dots (*)$$

は、 $(x, y) = (1, 1)$ のときにおいても成立する。よって

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1) \times f(1) \\ \Leftrightarrow f(1)(f(1) - 1) &= 0 \\ \therefore f(1) &= 0 \text{ または } 1 \end{aligned}$$

となる。ここで $f(1) = 0$ のとき、 $(*)$ に $y = 1$ を代入すると

$$f(x) = f(x) \times f(1) = 0$$

が成立し、 $f(x)$ は $f(x) = 0$ の定数関数となるため $f(1) \neq 0$ となる。よって $f(1) = 1$ となる。

(答) $f(1) = 1$

(2)

背理法を利用して、すべての正の実数 x について $f(x) > 0$ であることを示す。すなわち、ある正の実数 l に対して、 $f(l) \leq 0$ となると仮定して矛盾を導く。ここで、 $f(l) = 0$ とすると、 $(*)$ より

$$f(x) = f\left(\frac{x}{l}\right) \times f(l) = 0$$

となる。したがって、関数 $f(x)$ が定数関数でないことから、 $f(l) \neq 0$ である。よって、 $f(l) < 0$ となる。ここで $l = \sqrt{l} \times \sqrt{l}$ より、 $(*)$ を用いて

$$f(l) = f(\sqrt{l}) \times f(\sqrt{l})$$

となり、つまり $\{f(\sqrt{l})\}^2 < 0$ となる。これは $f(\sqrt{l})$ が実数であることに矛盾する。よって背理法により、すべての正の実数 x に対して $f(x) > 0$ となることが示された。

(証明終)

(3)

関数 $f(x)$ が微分可能であることは $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ が存在することと同義である。 $(*)$ より

り、 $x > 0$ のとき $f(x+h) = f(x) \times f\left(1 + \frac{h}{x}\right)$ が成立するため、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \times \left(f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - 1\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \times \left(f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで $h \rightarrow 0$ のとき $\frac{h}{x} \rightarrow 0$ であることに注意すると、 $f(x)$ が $x = 1$ で微分可能であることから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}}$$

が存在する。したがって

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x)}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}}$$

は存在し、関数 $f(x)$ はすべての正の実数 x において微分可能である。

(証明終)

(4)

(3)の過程で得られた式より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x)}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \\ &= \frac{f(x)}{x} f'(1) \\ &= \frac{f(x)}{x} a \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

となるため、 $f'(x) = \frac{f(x)}{x} a$ を代入して、

$$\begin{aligned} (\log f(x))' &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \frac{f(x)}{x} a \cdot \frac{1}{f(x)} \\ &= \frac{a}{x} \end{aligned}$$

となる。

(答) $(\log f(x))' = \frac{a}{x}$

(5)

(4)の答より $(\log f(x))' = \frac{a}{x}$ が成り立つため、この両辺を C を積分定数として積分することで、

$$\log f(x) = a \log x + C \quad (\because x > 0)$$

が得られる。ここで $x = 1$ のとき、(1)より $f(x) = 1$ であるから

$$0 = 0 + C$$

となるため、 $C = 0$ となり、 $\log f(x) = a \log x$ となる。よって $f(x) = x^a$ となる。

(答) $f(x) = x^a$