

平成 10 年度入学試験問題

数 学

(数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)

及び

(代数・幾何，基礎解析，微分・積分，確率・統計)

注 意

- 1 問題冊子は1冊，解答用紙は「(数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)」4枚，「(代数・幾何，基礎解析，微分・積分，確率・統計)」4枚，下書き用紙は3枚です。
- 2 出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

〔新教育課程履修者〕

出 題 科 目	ペ ー ジ	選 択 方 法
数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・ 数学B・数学C	1～2	左記科目を解答しなさい。

〔旧教育課程履修者〕

出 題 科 目	ペ ー ジ	選 択 方 法
数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・ 数学B・数学C	1～2	左記2科目のうちから1科目を選択し，解答しなさい。
代数・幾何，基礎解析， 微分・積分，確率・統計	3～4	

- 3 新教育課程履修者は「(数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)」の解答用紙に，旧教育課程履修者は選択する科目の解答用紙に，それぞれ受験番号を記入しなさい。
- 4 解答は，すべて解答用紙の指定されたところに書きなさい。また，答だけでなくそれに至る過程も記述しなさい。
- 5 新教育課程履修者は「(代数・幾何，基礎解析，微分・積分，確率・統計)」の解答用紙を，旧教育課程履修者は選択しなかった科目の解答用紙を，それぞれ試験時間中に監督者が回収するので，大きく×印をして机の左の方に重ねて置きなさい。
- 6 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数 学 (数学Ⅱ・数学Ⅲ・ 数学A・数学B・数学C)

1

列ベクトル $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ と $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ の内積を $u_1v_1 + u_2v_2$ と定める。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2×2 行列とする。

(1) 列ベクトル $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して, 列ベクトル Ae_1 , Ae_2 の内積が 0 であるための必要十分条件を a, b, c, d の式で表せ。

(2) 列ベクトル $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して, 列ベクトル Af_1 , Af_2 の内積が 0 であるための必要十分条件を a, b, c, d の式で表せ。

(3) A が (1), (2) の条件をみたすとき, 内積が 0 である任意の 2 つの列ベクトル u, v に対して, Au, Av の内積が 0 となることを示せ。

2

xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x(t), y(t))$ は

$$x(t) = f(t)\cos t, \quad y(t) = f(t)\sin t$$

で与えられているとする。ただし $f(t)$ は微分可能で $f'(t)$ は連続とする。

$t = a$ から $t = b$ までに点 P が動く道のりを L とする。

(1)

$$L = \int_a^b \sqrt{\{f(t)\}^2 + \{f'(t)\}^2} dt$$

が成り立つことを示せ。

(2)

$$L \leq \int_a^b \{|f(t)| + |f'(t)|\} dt$$

が成り立つことを示せ。

(3) $f(t) = e^{-\sqrt{t}}$, $a = 1$, $b = 4$ のとき, (2) の不等式を用いて

$$L \leq \frac{5}{e} - \frac{7}{e^2}$$

が成り立つことを示せ。

3

曲線 C と D_a を次のように定める。

C : 放物線 $y = x^2$

D_a : 中心が $(-1, a)$ で 2 点 $A(-2, 0)$ と原点 O を通る円

- (1) 不等式 $x > 0$ によって表される領域において D_a が C と共有点をもつための a の条件を求めよ。
- (2) 点 P が第 1 象限の C 上を動くとする。 $\angle APO$ が最大となるときの点 P の座標を求めよ。また、そのときの $\sin \angle APO$ の値を求めよ。

4

複素平面上で

$$z_0 = 2(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4} z_0$$

$$z_2 = -\frac{1}{z_0}$$

を表す点をそれぞれ P_0, P_1, P_2 とする。

- (1) z_1 を極形式で表せ。
- (2) z_2 を極形式で表せ。
- (3) 原点 O, P_0, P_1, P_2 の 4 点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ。

数 学 (代数・幾何, 基礎解析) (微分・積分, 確率・統計)

1

列ベクトル $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ と $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ の内積を $u_1v_1 + u_2v_2$ と定める。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2×2 行列とする。

(1) 列ベクトル $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して, 列ベクトル Ae_1 , Ae_2 の内積

が 0 であるための必要十分条件を a, b, c, d の式で表せ。

(2) 列ベクトル $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して, 列ベクトル Af_1 , Af_2 の内

積が 0 であるための必要十分条件を a, b, c, d の式で表せ。

(3) A が (1), (2) の条件をみたすとき, 内積が 0 である任意の 2 つの列ベクトル u, v に対して, Au, Av の内積が 0 となることを示せ。

2

xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x(t), y(t))$ は

$$x(t) = f(t)\cos t, \quad y(t) = f(t)\sin t$$

で与えられているとする。ただし $f(t)$ は微分可能で $f'(t)$ は連続とする。

$t = a$ から $t = b$ までに点 P が動く道のりを L とする。

(1)

$$L = \int_a^b \sqrt{\{f(t)\}^2 + \{f'(t)\}^2} dt$$

が成り立つことを示せ。

(2)

$$L \leq \int_a^b \{|f(t)| + |f'(t)|\} dt$$

が成り立つことを示せ。

(3) $f(t) = e^{-\sqrt{t}}$, $a = 1$, $b = 4$ のとき, (2) の不等式を用いて

$$L \leq \frac{5}{e} - \frac{7}{e^2}$$

が成り立つことを示せ。

3

曲線 C と D_a を次のように定める。

C : 放物線 $y = x^2$

D_a : 中心が $(-1, a)$ で 2 点 $A(-2, 0)$ と原点 O を通る円

- (1) 不等式 $x > 0$ によって表される領域において D_a が C と共有点をもつための a の条件を求めよ。
- (2) 点 P が第 1 象限の C 上を動くとする。 $\angle APO$ が最大となるときの点 P の座標を求めよ。また、そのときの $\sin \angle APO$ の値を求めよ。

4

当たりくじの出たあとに当たりくじの出る確率は $\frac{1}{20}$, はずれくじの出たあとに当たりくじの出る確率は $\frac{1}{10}$ になるように設定されたくじがある。 n 回目にくじを引いたときに、当たりくじの出る確率を p_n とおく。ただし $p_1 = \frac{1}{10}$ とする。

- (1) p_{n+1} と p_n の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) p_n を n の式で表せ。
- (3) n 回くじを引いたとき、当たりくじが出る回数の期待値を求めよ。