

1

$n$  を自然数とする。 $f(x)$  は 2 次関数で、曲線  $y = f(x)$  は座標平面上の 3 点  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(n, n)$  を通るとする。

(1) 2 次関数  $f(x)$  を求めよ。

(2) この関数  $f(x)$  について

$$S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

の値を  $n$  を用いて表せ。

(3) (2) で求めた  $S$  の値が整数であるためには、 $n + 2$  が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。

関数  $f(x)$  を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 7x + 4 & (x \leq 1 \text{ の場合}) \\ x & (x > 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 関数  $f(x)$  のグラフの概形を描け。

(2) 実数  $t$  に対して  $F(t)$  を

$$F(t) = \int_t^{t+1} f(x) dx$$

で定義するとき、関数  $F(t)$  の増減を調べ、そのグラフの概形を描け。また、 $F(t)$  の最小値を求めよ。

3

複素数平面において、複素数  $z = x + iy$  ( $x, y$  は実数,  $i$  は虚数単位) が直線  $y = 1$  の上を動くとき、 $\frac{1}{z^2}$  が描く図形を  $C$  とする。

- (1)  $C$  が実軸に関して対称であることを証明せよ。
- (2)  $C$  上の点に対応する複素数の絶対値を  $r$ , 偏角を  $\theta$  とするとき,  $r$  を  $\theta$  で表せ。

1 辺の長さが  $a$  の正方形の板が 1 枚ある。この板から、1 辺の長さが  $x$  の正三角形 4 枚を切り出して正四面体をつくることを考える。次の問いに答えよ。ただし、板の厚さは無視する。

- (1) 図 1 のように正三角形 2 枚で平行四辺形をつくり、これを単位として切り出すとする。ただし、平行四辺形の 1 辺は正方形の辺上にとるものとする。このとき、正四面体の体積が最大となるような  $x$  と、そのときの体積を求めよ。

- (2) 図 2 のように各三角形の 1 辺を正方形の各辺上にとり、切り出すとする。正四面体の体積が最大となるような  $x$  を求めよ。

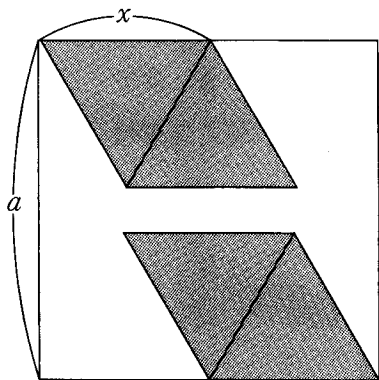


図 1

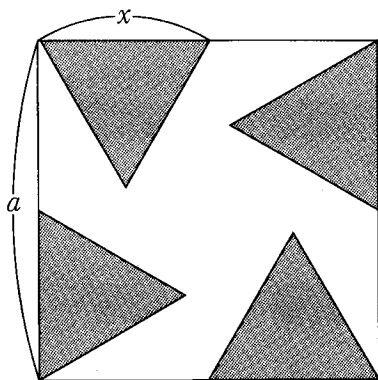


図 2