

r, s, t は 0 でない定数とする。数列 $\{a_n\}$ は条件

$$ra_{n+1} + sa_n + t = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしているとし、 $b_n = a_{n+1} - a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ とおく。

(1) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(2) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_2 < a_3, a_4 = 13 + 3\sqrt{3}$ であるとき、一般項 a_n を求めよ。

(3) (2) の条件の下で

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}$$

を求めよ。

2

xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を、 A は点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに一定の早さで一周する。 B は点 $(-1, 0)$ を A と同時に出発し、時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。
- (2) A と B が点 $(0, 1)$ で出会うのは n がどのような条件をみたすときか。
- (3) $n = 7$ とする。 A が、 B を通り y 軸に平行な直線の左側 (点 $(-2, 0)$ を含む側) にある範囲を求めて、 C 上に図示せよ。

3

複素数平面上の点 $z_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ を以下のように定める。 $z_1 = 1$ とする。
次にさいころを振り、出た目が

(a) 1 または 2 のとき, $z_{n+1} = z_n + (1 + i)$

(b) 3 以上のとき, $z_{n+1} = z_n(1 + i)$

とし、この操作を $n = 1, 2, 3, \dots$ の順にくり返す。初めて $|z_n| \geq 3$ となるような番号 n を N とする。ただし、 i は虚数単位とする。

(1) N のとりうる値を求めよ。

(2) N の期待値を求めよ。

曲線 $y = x^2$ を C とし、 C 上の異なる 2 点を $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ とする。 A を通り、 A における C の接線と直交する直線を ℓ とする。 B を通り、 B における C の接線と直交する直線を m とする。

- (1) ℓ と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。
- (2) ℓ と m が直交するように点 A, B が動くとき、交点 P がえがく曲線の方程式を求めよ。
- (3) (2)で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。