

$$(1) \quad y = x^2$$

$$y' = 2x$$

より, l の傾きは -2 となるから,

$$l: y = -2(x+1) + 1$$

$$\therefore y = -2x - 1 \quad \cdots (\text{答})$$

$$(2) \quad \text{直線 AB の傾きは } \frac{4-1}{2+1} = 1 \text{ だから,}$$

$$\text{その方程式は, } y = (x+1) + 1$$

$$\therefore y = x + 2$$

線分 AB 上に点 $P(t, t+2)$ をとると,

$$AP:PB = t+1:2-t \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり, また, $Q(t, -2t-1)$, $R(t, t^2)$ となるから,

$$\begin{aligned} QR:RP &= t^2 + 2t + 1 : t + 2 - t^2 \\ &= (t+1)^2 : (t+1)(2-t) \\ &= t+1 : 2-t \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

よって, ①, ② より,

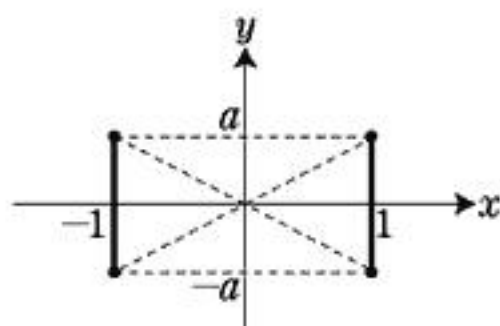
$$QR:RP = AP:PB \quad (\text{証明終})$$

(1)

(ア) 18 (イ) 48

(2) X について考えると, $0 < a < 1$

より, 右図の実線部分の距離が最小で, 2 通りある。Y, Z についても同様だから, 6 通りあってその距離は $2a$ … (答)

(3) X 内の点 $(1, a, 0)$ と Y 内の 4 点とのとりうる距離は

$\sqrt{1+a^2+(1\pm a)^2}$ の 2 種類あり, それぞれ 2 通りずつある。

X 内のその他の点との組み合わせを考えても同様で, さらに (Y, Z) , (Z, X) の点の組み合わせを考えても同様だから, 距離

の最小値は $\sqrt{1+a^2+(1-a)^2} = \sqrt{2(1-a+a^2)}$ … (答)

で, $2 \times 4 \times 3 = 24$ (通り) … (答)

$$(4) \quad 2a = \sqrt{2(1-a+a^2)}$$

$$4a^2 = 2(1-a+a^2)$$

$$a^2 + a - 1 = 0$$

$$0 < a < 1 \text{ より, } a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \dots \text{ (答)}$$

また, X 内の $(1, a, 0)$ と Y 内の $(0, 1, a)$ を選ぶと,

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+a^2}} = \frac{a}{1+a^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

他の 29 通りについても同じ値となるから,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(1) \quad \{a_n\} : 2, 5, 10, 17, \dots$$

$$\{b_n\} : 6, 15, 30, 51, \dots$$

より, $c_4 = 10, c_5 = 15, c_6 = 17 \dots$ (答)

$$(2) \quad \begin{cases} a_{3k} = 9k^2 + 1 = 3 \cdot 3k^2 + 1 \\ a_{3k-1} = (3k-1)^2 + 1 = 3(3k^2 - 2k) + 2 \\ a_{3k-2} = (3k-2)^2 + 1 = 3(3k^2 - 4k + 1) + 2 \end{cases}$$

より, a_n は 3 の倍数ではないが, 一方, $b_n = 3(n^2 + 1)$ より b_n は 3 の倍数だから, a_n は $\{b_n\}$ のどの項とも一致しない。

(証明終)

(3) $\{b_n\}$ から来る項が連続して 2 個並んだと仮定すると, ある自然数 m, n に対して

$$\begin{cases} a_m < b_n & \dots \textcircled{1} \\ b_{n+1} < a_{m+1} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{まず, } \textcircled{1} \text{ より, } m^2 < 3n^2 + 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

次に, $b_n = 3a_n$ だから, $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より,

$$a_m + 3a_{n+1} < 3a_n + a_{m+1}$$

$$3(a_{n+1} - a_n) < a_{m+1} - a_m$$

$$3(2n+1) < 2m+1$$

$$\therefore 3n+1 < m \quad \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より,

$$(3n+1)^2 < 3n^2 + 2$$

$$6n^2 + 6n < 1$$

$$6n(n+1) < 1$$

しかし, これをみたす自然数 n は存在しないから矛盾。よって, 背理法により, $\{b_n\}$ から来る項は連続して 2 個以上並ばない。

(証明終)

$$(1) \quad \begin{cases} z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \end{cases}$$

$$\text{より, } \frac{z}{4} + \frac{4}{z} \text{ が実数} \iff \frac{z}{4} + \frac{4}{z} = \frac{\bar{z}}{4} + \frac{4}{\bar{z}}$$

$$\iff \frac{r}{4} \cdot 2i \sin \theta - \frac{4}{r} \cdot 2i \sin \theta = 0$$

$$\iff \left(\frac{r}{4} - \frac{4}{r} \right) \sin \theta = 0$$

$$\text{よって, } \frac{r}{4} = \frac{4}{r} \text{ または } \sin \theta = 0$$

となるから, $r > 0$, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ より,
 $r = 4$ または $\theta = 0^\circ, 180^\circ \dots$ (答)

(2)

(i) $r = 4$ のとき,

$$\frac{z}{4} + \frac{4}{z} = 2 \cos \theta$$

となるから, $0 \leq 2 \cos \theta \leq 4$ より,

$$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, 270^\circ \leq \theta < 360^\circ$$

$$\therefore z = 4(\cos \theta + i \sin \theta) (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, 270^\circ \leq \theta < 360^\circ)$$

(ii) $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ のとき, $z = \pm r$ となるが,

$$\frac{z}{4} + \frac{4}{z} = \pm \left(\frac{r}{4} + \frac{4}{r} \right)$$

が 0 以上となるためには $z = -r$ は不適で, $z = r$ ならよい。
 よって,

$$\frac{r}{4} + \frac{4}{r} \leq 4$$

$$r^2 - 16r + 16 \leq 0$$

$$8 - 4\sqrt{3} \leq r \leq 8 + 4\sqrt{3}$$

(i)(ii)を図示すると右図の実線部分となり, 端点は4つとも含む。

