

①

$$(1) A^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^6 = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) A は逆行列をもつから, $A^n = \lambda A$ が成り立つことは, $A^{n-1} = \lambda E$ が成り立つことと同じである.

$$A^6 = 8 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } A^{12} = 64 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -64E$$

他方, A^3, A^6 の成分から

$$A^4 = A^3 A, \quad A^5 = A^3 A^2, \quad A^7 = A^6 A, \quad A^8 = A^6 A^2$$

$$A^9 = A^6 A^3, \quad A^{10} = A^6 A^3 A, \quad A^{11} = A^6 A^3 A^2$$

のいずれも λE の形にはなり得ない. したがって

$$A^{13} = -64A$$

となる $n=13$ が最小である.

$$\therefore n=13, \quad \lambda = -64 \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

$$(3) A^{120} = (A^{12})^{10} = (-2^6 E)^{10} = 2^{60} E \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

②

(1) 与えられた漸化式より

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1}$$

したがって、

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1 &= \frac{1}{(a_n + 1)^2} + \frac{1}{a_n + 1} - 1 \\ &= -\frac{a_n^2 + a_n - 1}{(a_n + 1)^2} \dots\dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 上の結果より

$$b_{n+1} = -\frac{b_n}{(a_n + 1)^2}$$

である。したがって、 b_n と b_{n+1} は反対符号である。

また、 $a_1 = 1$ より $b_1 = 1 > 0$ であるから、 n が奇数のときは $b_n > 0$ 、 n が偶数のときは $b_n < 0$ である。

つまり、 $b_{2n-1} > 0$ 、 $b_{2n} < 0$ である。

(3) 与えられた漸化式により、 $\forall n \geq 1$ $a_n > 0$ 。

(2) の結果より、 $b_{2n} < 0$ なる

$$a_{2n}^2 + a_{2n} - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < a_{2n} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

また、 $b_{2n-1} > 0$ より

$$a_{2n-1}^2 + a_{2n-1} - 1 > 0$$

$$\therefore a_{2n-1} < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < a_{2n-1}$$

これより、 $a_n > 0$ より

$$a_{2n} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < a_{2n-1}$$

③

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解を α, β, γ とすると

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -p & \text{----- ①} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q & \text{----- ②} \\ \alpha\beta\gamma = -r & \text{----- ③} \end{cases}$$

解のうち実数解を α とする. 絶対値が 1 に等しい虚数解を β とすると $\gamma = \bar{\beta}$ であり

$$\beta + \gamma \text{ は実数. } \beta\gamma = \beta\bar{\beta} = |\beta|^2 = 1$$

となる. したがって ③ より $\alpha = -r$ となる.

よって $\beta + \gamma = m$ とし, ①, ② を整理すると

$$\begin{cases} -r + m = -p & \text{----- ④} \\ -rm + 1 = q & \text{----- ⑤} \end{cases}$$

条件 (a) より $p = \pm r, q = \pm r$ である.

(I) $p = r$ の場合

④ より $m = 0$. $\therefore$ ⑤ より $q = 1$. $\therefore p = r = \pm 1$ の場合, 方程式は

$$x^3 \pm x^2 + x \pm 1 = (x \pm 1)(x^2 + 1) = 0$$

となるので条件をみたす.

(II) $p = -r$ の場合.

④ より $m = 2r$. $\therefore$ ⑤ より $-2r^2 + 1 = q$

(i) $q = r$ の場合

$$2r^2 + r - 1 = (2r - 1)(r + 1) = 0.$$

$r = \frac{1}{2}$ の場合, 方程式は

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)(x^2 - x + 1) = 0$$

となるので条件をみたす.

$r = -1$ の場合, 方程式は

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1) = 0$$

となるので不適.

(ii) $q = -r$ の場合

$$2r^2 - r - 1 = (2r + 1)(r - 1) = 0$$

$r = -\frac{1}{2}$ の場合, 方程式は

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + x + 1) = 0$$

となるので条件をみたす.

$r = 1$ の場合, 方程式は

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1) = 0$$

となるので不適.

以上をまとめると, (p, q, r) は

$$(1, 1, 1), (-1, 1, -1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \dots \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

4

(1) PH: PA = R:1 である。

$$\frac{1}{R} PH = PA \quad \therefore \frac{1}{R^2} PH^2 = PA^2$$

$$\therefore \frac{1}{R^2} x^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$$

Pとx軸の距離をhとすると

$$h^2 = y^2 + z^2 = \frac{1}{R^2} x^2 - (x-1)^2$$

$$= -\frac{R^2-1}{R^2} x^2 + 2x - 1$$

$$= -\frac{R^2-1}{R^2} \left(x - \frac{R^2}{R^2-1}\right)^2 + \frac{1}{R^2-1}$$

よって、最大値は $h = \frac{1}{\sqrt{R^2-1}}$ ----- (答)

(2) Sをx軸と垂直な平面 $x=t$ で切ると、切り口は、

$$y^2 + z^2 = -\frac{R^2-1}{R^2} t^2 + 2t - 1$$

と表される円である。よって、Sはx軸の周りの回転体である。回転する前の図形は、x軸を端とする半平面 $z=0, y \geq 0$ であって、切り口である。

(3) 上の式から、Sの存在する範囲は

$$-\frac{R^2-1}{R^2} t^2 + 2t - 1 \geq 0$$

$$\therefore (R^2-1)t^2 - 2R^2 t + R^2 \leq 0$$

$$\therefore \frac{R}{R+1} \leq t \leq \frac{R}{R-1}$$

したがって、立体の体積は

$$\pi \int_{\frac{R}{R+1}}^{\frac{R}{R-1}} \left(-\frac{R^2-1}{R^2} t^2 + 2t - 1\right) dt$$

$$= -\pi \frac{R^2-1}{R^2} \int_{\frac{R}{R+1}}^{\frac{R}{R-1}} \left(t - \frac{R}{R+1}\right) \left(t - \frac{R}{R-1}\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{6} \frac{R^2-1}{R^2} \left(\frac{R}{R-1} - \frac{R}{R+1}\right)^3$$

$$= \frac{4R\pi}{3(R^2-1)^2} \text{ ----- (答)}$$