

平成 16 年度入学試験問題

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B)

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊，解答用紙は 4 枚，下書き用紙は 3 枚です。
- 2 すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
- 3 解答は，すべて解答用紙の指定されたところに書きなさい。
また，答だけでなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
- 4 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数 学 $\left(\begin{array}{l} \text{数学 I} \cdot \text{数学 II} \cdot \\ \text{数学 A} \cdot \text{数学 B} \end{array} \right)$

1

放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$ をとる。放物線の A における接線を ℓ とする。線分 AB 上に A , B と異なる点 P をとる。 P を通り y 軸に平行な直線が ℓ と交わる点を Q とし、放物線と交わる点を R とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) ℓ の方程式を求めよ。
- (2) $QR : RP = AP : PB$ であることを示せ。

2

定数 a は、 $0 < a < 1$ を満たすものとする。空間に、次の 3 つのグループからなる 12 点をとる。

$$X = \{(1, a, 0), (1, -a, 0), (-1, a, 0), (-1, -a, 0)\}$$

$$Y = \{(0, 1, a), (0, 1, -a), (0, -1, a), (0, -1, -a)\}$$

$$Z = \{(a, 0, 1), (-a, 0, 1), (a, 0, -1), (-a, 0, -1)\}$$

これらの 12 点から異なる 2 点を選ぶ選び方は

(ア) 同一グループ内の 2 点となる場合

(イ) 異なるグループから 1 点ずつの 2 点となる場合

の 2 種類に分けられる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) (ア), (イ) それぞれの場合の数を求めよ (答のみでよい)。
- (2) (ア) の場合、2 点間の距離が最小となる選び方は何通りあるか。また、その距離を求めよ。
- (3) (イ) の場合、2 点間の距離が最小となる選び方は何通りあるか。また、その距離を求めよ。

- (4) (2)で求めた距離と(3)で求めた距離が等しくなるように a の値を定めよ。
また、そのとき選んだ2点の位置ベクトルのなす角を θ として、 $\cos \theta$ の値を求めよ。ただし、位置ベクトルは原点 O を基準とする。

3

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = n^2 + 1$ で定め、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = 3n^2 + 3$ で定める。これら2つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を $\{c_n\}$ とする。たとえば、初めの3項は、 $c_1 = 2$ 、 $c_2 = 5$ 、 $c_3 = 6$ となっている。このうち、 $\{a_n\}$ から来る項は $c_1 = a_1$ 、 $c_2 = a_2$ 、 $\{b_n\}$ から来る項は $c_3 = b_1$ である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) c_4 、 c_5 、 c_6 を求めよ。
- (2) $n = 3k$ 、 $3k - 1$ 、 $3k - 2$ (k は自然数) の場合に分けて考えることにより、 a_n は3の倍数ではなく、したがって a_n は $\{b_n\}$ のどの項とも一致しないことを示せ。
- (3) $\{c_n\}$ において、 $\{b_n\}$ から来る項は連続して2個以上並ばないことを、背理法を用いて示せ。

4

z を0でない複素数とする。

- (1) z の絶対値を r 、偏角を θ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) とするとき、 $\frac{z}{4} + \frac{4}{z}$ が実数となるような r と θ を求めよ。
- (2) $\frac{z}{4} + \frac{4}{z}$ が実数で、その値が0以上4以下であるような点 z はどのような図形を描くか。複素数平面上に図示せよ。