

1 (1). 日本語の本の冊数を m とおく ($1 \leq m \leq 8$)
仮定より

$$\frac{{}_{10-n}C_2 \cdot {}_n C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{40} \Leftrightarrow m(10-n)(9-n) = 42$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 19m^2 + 90m - 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-7)(m^2 - 12m + 6) = 0$$

よって m は $1 \leq m \leq 8$ なる自然数より $m=7$.

$\therefore$ 7冊 //

(2) 赤のカードに書かれていた数: x

青 $\quad \quad \quad$ y ($1 \leq x, y, z \leq 12$)

黄 $\quad \quad \quad$ z

よくと、求める取り出し方は

$$x+y+z = 15 \quad (1 \leq x, y, z \leq 12)$$

となる整数解 (x, y, z) の個数である。

$$X = x-1, Y = y-1, Z = z-1 \text{ によくと}$$

$$X+Y+Z = 12 \quad (0 \leq X, Y, Z \leq 11)$$

となる整数解 (X, Y, Z) の個数を求める。

これは

0×12 と 1×2 本の順列のうち。

$$1|0 \cdots 0 \quad (X, Y, Z) = (0, 0, 12)$$

$$10 \cdots 0| \quad (X, Y, Z) = (0, 12, 0) \quad \text{の3通りを除いたもの}$$

$$0 \cdots 0|1 \quad (X, Y, Z) = (12, 0, 0)$$

よって

$$\frac{(12+2)!}{12! \cdot 2!} - 3 = \underline{\underline{88}} //$$

$$\begin{aligned} 2. (1) \quad x_2 &= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\ &= \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$x_n = \cos \frac{\theta}{2^{n-1}}$, $y_n = \sin \frac{\theta}{2^{n-1}}$ と予想できる. これを帰納法で示す.
 $n=1$ のときは明らかに成立している.

n のとき成立を仮定すると

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}}{2}} \\ &= \sqrt{\cos^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta}{2^{n-1}}} \\ &= \cos \frac{\theta}{2^n} \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}{2\cos\frac{\theta}{2^n}} \\ &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^n}}{2\cos\frac{\theta}{2^n}} \\ &= \sin\frac{\theta}{2^n} \end{aligned}$$

となり, $n+1$ のときも成立する. (したがって帰納法により予想は正しい.)
 まとめると

$$\boxed{\begin{aligned} x_2 &= \cos \frac{\theta}{2}, \quad y_2 = \sin \frac{\theta}{2} \\ x_n &= \cos \frac{\theta}{2^{n-1}}, \quad y_n = \sin \frac{\theta}{2^{n-1}} \end{aligned}} \quad \text{H}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (x_n + iy_n)^{4n} &= \left(\cos \frac{\theta}{2^{n-1}} + i \sin \frac{\theta}{2^{n-1}} \right)^{4n} \\ &= \left(\cos \frac{n\theta}{2^{n-3}} + i \sin \frac{n\theta}{2^{n-3}} \right) \quad (\text{①ド・モアワールの定理}) \end{aligned}$$

より, $n \geq 7$ のとき, $\frac{n\theta}{2^{n-3}} < \frac{1}{2} \dots$ ①を示すことができれば, $0^\circ < \theta < 180^\circ$
 より

$$0^\circ < \frac{n\theta}{2^{n-3}} < 90^\circ$$

となり, $(x_n + iy_n)^{4n} = i$ とならないことがわかる.

そこで, ①を変形して

$n \geq 7$ のとき $n < 2^{n-4}$
 を示す. 二項定理を用いて.

$$\begin{aligned} 2^{n-4} &= (1+1)^{n-4} \\ &= \sum_{k=0}^{n-4} {}^{n-4}C_k \\ &\geq {}^{n-4}C_0 + {}^{n-4}C_1 + {}^{n-4}C_{n-5} + {}^{n-4}C_{n-4} \quad (\text{② } n \geq 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{n-4} &\geq 1 + n-4 + n-4 + 1 \\ &\geq 2n-2 \\ &= n + (n-2) \\ &> n \quad (\text{③ } n \geq 7 \text{ あり } n-2 > 0) \end{aligned}$$

となるので ①は成立する. (したがって問題意は示された. //

(3) (2)より, $n \leq 6$ の自然数について調べればよい.
 n を整数とて.

$$\begin{aligned} n=1 \text{ のとき} \quad \frac{1\theta}{2^{1-3}} &= 4\theta \quad \therefore 4\theta = 90^\circ + 360^\circ k \\ \text{より} \quad \theta &= 112.5^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=2 \text{ のとき} \quad \frac{2\theta}{2^{2-3}} &= 4\theta \quad \therefore 4\theta = 90^\circ + 360^\circ k \\ \text{より} \quad \theta &= 112.5^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=3 \text{ のとき} \quad \frac{3\theta}{2^{3-3}} &= 3\theta \quad \therefore 3\theta = 90^\circ + 360^\circ k \\ \text{より} \quad \theta &= 150^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=4 \text{ のとき} \quad \frac{4\theta}{2^{4-3}} &= 2\theta \quad \therefore 2\theta = 90^\circ + 360^\circ k \\ \text{より} \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ では} \\ &\text{存在しない.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=5 \text{ のとき} \quad \frac{5\theta}{2^{5-3}} &= \frac{5}{4}\theta \quad \therefore \frac{5}{4}\theta = 90^\circ + 360^\circ k \\ \text{より} \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ では} \\ &\text{存在しない.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=6 \text{ のとき} \quad \frac{6\theta}{2^{6-3}} &= \frac{3}{4}\theta \quad \therefore \frac{3}{4}\theta = 90^\circ + 360^\circ k \\ \text{より} \quad \theta &= 120^\circ \end{aligned}$$

となるので, 求める n と θ の組は

$$(n, \theta) = (1, 112.5^\circ), (2, 112.5^\circ), (3, 150^\circ), (6, 120^\circ)$$

$$3. \quad f'(x) = 3x^2 - 2ax$$

$$= x(3x - 2a)$$

まず、極値をもつものとして $\frac{2}{3}a \neq 0$ (i.e. $a \neq 0$) がいる。

Case 1 $\frac{2}{3}a < 0$ (i.e. $a < 0$) のとき

$f(x)$ の増減は、

x	$\dots$	$\frac{2}{3}a$	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore f(\frac{2}{3}a)$: 極大値

$f(0)$: 極小値

とある

(したがって仮定より)

$$\begin{cases} f(\frac{2}{3}a) = 5 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{27}a^3 - \frac{4}{9}a^3 + b = 5 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\therefore a = -3, b = 1$$

Case 2 $\frac{2}{3}a > 0$ (i.e. $a > 0$) のとき

$f(x)$ の増減は

x	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{2}{3}a$	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore f(0)$: 極大値

$f(\frac{2}{3}a)$: 極小値

とある

(したがって仮定より)

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ f(\frac{2}{3}a) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ \frac{8}{27}a^3 - \frac{4}{9}a^3 + b = 1 \end{cases}$$

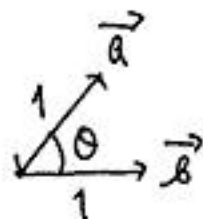
$$\therefore a = 3, b = 5$$

以上より、

$$(a, b) = (-3, 1), (3, 5)$$

++

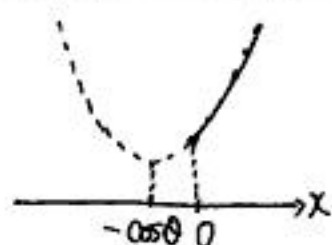
4



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta \\ = \cos \theta$$

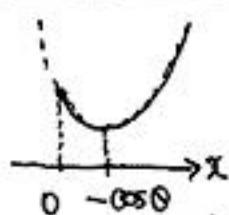
$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= |\lambda \vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= (\lambda \vec{a} + \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{a} + \vec{b}) \\ &= \lambda^2 |\vec{a}|^2 + 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= \lambda^2 + 2\cos \theta \lambda + 1 \\ &= (\lambda + \cos \theta)^2 + 1 - \cos^2 \theta = (\lambda + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Case 1 $\cos \theta \geq 0$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) のとき



$f(x)$ は左図のおよになる。
このとき、 $f(x)$ は $x=0$ で最小値 $f(0)=1$ をとる。

Case 2 $\cos \theta < 0$ ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$) のとき



$f(x)$ は左図のおよになる。
このとき、 $f(x)$ は $x = -\cos \theta$ で最小値 $f(-\cos \theta) = \sin^2 \theta$ をとる。

よって、 $f(x)$ の最小値 ($\lambda \geq 0$) は、

1	($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)
$\sin^2 \theta$	($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$)

(2) (1) の頂点は $(-\cos \theta, \sin^2 \theta)$ あり、

$$\begin{cases} x = -\cos \theta \\ y = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \end{cases} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

とがけらる。求める軌跡は

$$y = 1 - x^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

(3)

求める面積は左図の斜線部の面積である。

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{6} \{1 - (-1)\}^3 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

