

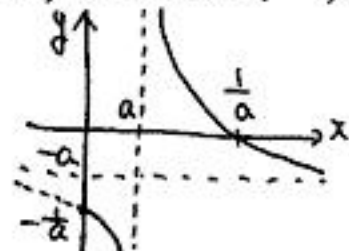
$$1 (1) y = \frac{ax-1}{a-x}$$

$$= -a - \frac{a^2-1}{x-a}$$

とある。

$$(i) a=1 \text{ のとき } y = -1 \quad (x \neq 1)$$

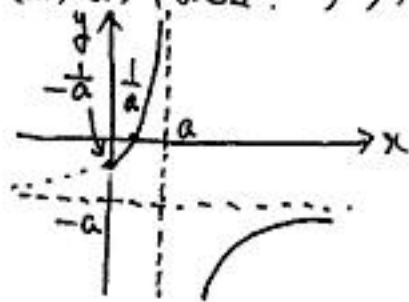
(ii)  $0 < a < 1$  のとき グラフをかくと上図のようになる。



$\therefore y$  の取りうる範囲は

$$y \leq -\frac{1}{a}, \quad -a < y$$

(iii)  $a > 1$  のとき グラフをかくと上図のようになる。



$$\therefore y < -a, \quad -\frac{1}{a} \leq y$$

以上まとめると

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{a}, \quad -a < y & (0 < a < 1) \\ y = -1 & (a = 1) \\ y < -a, \quad -\frac{1}{a} \leq y & (a > 1) \end{cases}$$

$$(2) \quad 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2$$

$$= 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx)$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2$$

$$= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$$

また、等号成立は

$$x-y=0 \text{ か } y-z=0 \text{ か } z-x=0$$

すなわち、 $x=y=z$  のときである。

以上により

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \quad (\text{等号成立は } x=y=z \text{ のとき})$$

とある //

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a \text{ とすると、①より}$$

$$\frac{1}{3}(x+y+z)^2 \leq a \quad \therefore -\sqrt{3a} \leq x+y+z \leq \sqrt{3a}$$

したがって、 $\sqrt{3a} \leq a$  とすれば、与えられた命題は真となる。

$\sqrt{3a} \leq a$  は両辺ともに正より2乗して

$$3a \leq a^2 \Leftrightarrow a(a-3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \leq 0, \quad 3 \leq a$$

とあるので、求める  $a$  は  $a=3$  となる //

2(1)  $\frac{a_n}{b_n}$  を定義する。また、与えられた漸化式を  $C_n$  で約分したい。  
 ので、すべての自然数  $n$  に対して  
 $a_n \neq 0, b_n \neq 0$   
 を示したい。より一般に

すべての自然数  $n$  について  $a_n > 0, b_n > 0 \dots (P)$   
 が成立するので、まず、これを帰納法により示す。

・  $n=1$  のとき  $a_1 = a > 0, b_1 = b > 0$  は成立。

・  $n$  のとき成立を仮定すると

$$a_n b_n > 0, a_n^2 > 0$$

より

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n + a_n^2}{a_n^2 + 5a_n b_n} > 0$$

$$b_{n+1} = \frac{3a_n b_n}{a_n^2 + 5a_n b_n} > 0$$

となるので、 $n+1$  のときも成立する。

以上、帰納法により  $(P)$  は示された。

$(P)$  により

$$a_{n+1} = \frac{2b_n + a_n}{a_n + 5b_n}, b_{n+1} = \frac{3b_n}{a_n + 5b_n}$$

とかける。

$$C_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{2b_n + a_n}{3b_n} \\ = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_n$$

$$C_{n+1} - 1 = \frac{1}{3} (C_n - 1)$$

とかけると  $C_1 = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$  より

$$C_n - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (C_1 - 1) \quad \therefore C_n = 1 + \left(\frac{a}{b} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 1$  に注意する

$$a_{n+1} = \frac{C_n + 2}{C_n + 5} = 1 - \frac{3}{C_n + 5}, b_{n+1} = \frac{3}{C_n + 5}$$

$$\therefore a_n = 1 - \frac{3}{C_{n-1} + 5}, b_n = \frac{3}{C_{n-1} + 5}$$

したがって  $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{n-1} + 5) = 6$  より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$$



4 (1)  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  とかけるので、ド・モアivreの定理より

$$w = z^2 + \frac{1}{z}$$

$$= \cos 2\theta + i \sin 2\theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

$$= \cos 2\theta + \cos \theta + i(\sin 2\theta - \sin \theta)$$

$$= 2 \cos \frac{3}{2}\theta \cos \frac{\theta}{2} + i 2 \cos \frac{3}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{3}{2}\theta (\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2})$$

$$\therefore \cos \frac{3}{2}\theta = 0 \text{ あり } \theta = -\pi, \pm \frac{\pi}{3}$$

(2) (1)より

(i)  $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{3}$  のとき  $\cos \frac{3}{2}\theta < 0$  あり、 $w$  の偏角  $\beta$  は  $\frac{\theta}{2}$  から  $\pi$  ずつ増える。

$$-\pi \leq \beta < \pi \text{ あり } \beta = \frac{\theta}{2} + \pi$$

(ii)  $-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}$  のとき、 $\cos \frac{3}{2}\theta \geq 0$  あり、 $\beta = \frac{\theta}{2}$

(iii)  $\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$  のとき、 $\cos \frac{3}{2}\theta < 0$  あり、 $w$  の偏角  $\beta$  は  $\frac{\theta}{2}$  から  $\pi$  ずつ減る。

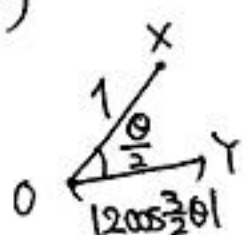
$$-\pi \leq \beta < \pi \text{ あり } \beta = \frac{\theta}{2} - \pi$$

以上まとめると

$$\begin{cases} \beta = \frac{\theta}{2} + \pi & (-\pi < \theta < -\frac{\pi}{3}) \\ \beta = \frac{\theta}{2} & (-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}) \\ \beta = \frac{\theta}{2} - \pi & (\frac{\pi}{3} < \theta < \pi) \end{cases}$$

(3)

図より 三角形 OXY の面積  $S$  は



$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |2 \cos \frac{3}{2}\theta| \cdot |\sin \frac{\theta}{2}|$$

$$= |\cos \frac{3}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2}|$$

$$= \frac{1}{2} |\sin 2\theta - \sin \theta|$$

ここで  $f(\theta) = \sin 2\theta - \sin \theta$  とおく。  $f(-\theta) = -f(\theta)$  に注意して  $0 \leq \theta \leq \pi$  で考える。

$$f'(\theta) = 2 \cos 2\theta - \cos \theta$$

$$= 4 \cos^2 \theta - \cos \theta - 2$$

$$f'(\theta) = 0 \text{ あり。 } \cos \theta = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

$$\text{ここで } \cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \cos \beta = \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \text{ とおく } (0 < \alpha < \beta < \pi)$$

$f(\theta)$  の増減は以下のおよになる

| $\theta$     | 0 | $\dots$ | $\alpha$ | $\dots$ | $\beta$ | $\dots$ | $\pi$ |
|--------------|---|---------|----------|---------|---------|---------|-------|
| $f(\theta)$  |   | +       | 0        | -       | 0       | +       |       |
| $f'(\theta)$ |   | ↑       |          | ↓       |         | ↑       |       |

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{30 - 2\sqrt{33}}{8}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$$

$$= \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8}$$

$$\therefore f(\theta) = \sin \theta (2 \cos \theta - 1) \text{ あり}$$

$$f(\alpha) = \frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}} (-3 + \sqrt{33})}{32}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}} (\sqrt{11} - \sqrt{3})}{32}$$

$$< \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{30} (\sqrt{12} - \sqrt{3})}{32}$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{90}}{16} < \sqrt{3}$$

$$f(\beta) = -\frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}} (3 + \sqrt{33})}{32}$$

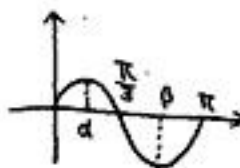
$$= -\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}} (\sqrt{3} + \sqrt{11})}{32}$$

$$< -\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{30 + 2 \cdot 5} (\sqrt{3} + \sqrt{11})}{32}$$

$$= -\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{10} (\sqrt{3} + \sqrt{11})}{16} < -\sqrt{3}$$

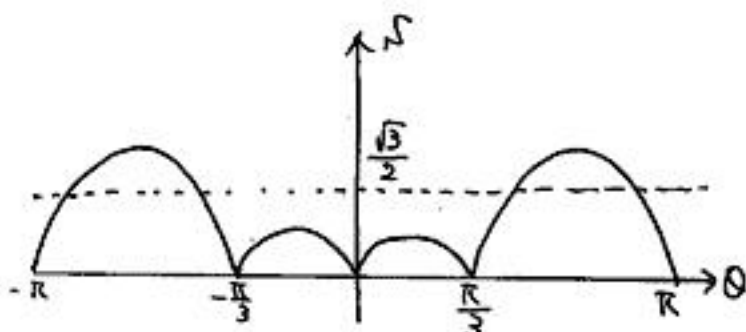
$$\left( \begin{aligned} \text{ここで } 16^2 - \{\sqrt{10} (\sqrt{3} + \sqrt{11})\}^2 &= 256 - 10(3 + 11 + 2\sqrt{33}) \\ &= 116 - 20\sqrt{33} \\ &= 4(29 - 5\sqrt{33}) & 29^2 &= 841 \\ &> 0 & (5\sqrt{33})^2 &= 825 \\ \therefore 16 &> \sqrt{10} (\sqrt{3} + \sqrt{11}) \end{aligned} \right)$$

したがって  $f(\theta)$  のグラフは



とあるので、

$S$  のグラフは以下のおよになる



$$\text{よって } S = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ となる } \theta \text{ の個数は } \underline{4} \text{ 個}$$