

1

$$(1) \quad \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x} - 2\right)\left(x - \frac{1}{x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} - 2 = 0 \text{ or } x - \frac{1}{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ or } x^2 - x - 1 = 0 \quad \because x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \text{ or } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{----- (答)}$$

$$(2) \quad \left(x - a\right)^2 + \left(\frac{1}{x} + a\right)^2$$

$$= x^2 - 2xa + a^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2a}{x} + a^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 2a\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2a^2$$

$$= \underline{t^2 - 2at + 2 + 2a^2} \quad \text{----- (答)}$$

ここで、

$$t = x - \frac{1}{x}$$

とおいだ。

$$(3) \quad C_1: (x-a)^2 + (y+a)^2 = r^2 \quad \text{---- ①}$$

$$C_2: y = \frac{1}{x} \quad \text{---- ②}$$

① ② は、ともに、 $y = -x$ に関して対称である。よって、① ② が、ちょうど共有点

を 2 個もつ時、① ② の共有点は、ともに接点となる。よって、接点の座標は、

$$\left(x, \frac{1}{x}\right), \left(-\frac{1}{x}, x\right) \quad \text{----- ③}$$

とおける。

次に、接点③の満たす方程式を考察する。① ② より、 y を消去して

$$\left(x - a\right)^2 + \left(\frac{1}{x} + a\right)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2a\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 + 2a^2 - r^2 = 0$$

$\therefore (2)$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = a \pm \sqrt{-a^2 - 2 + r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{-a^2 - 2 + r^2}\right) \quad \text{---- ④}$$

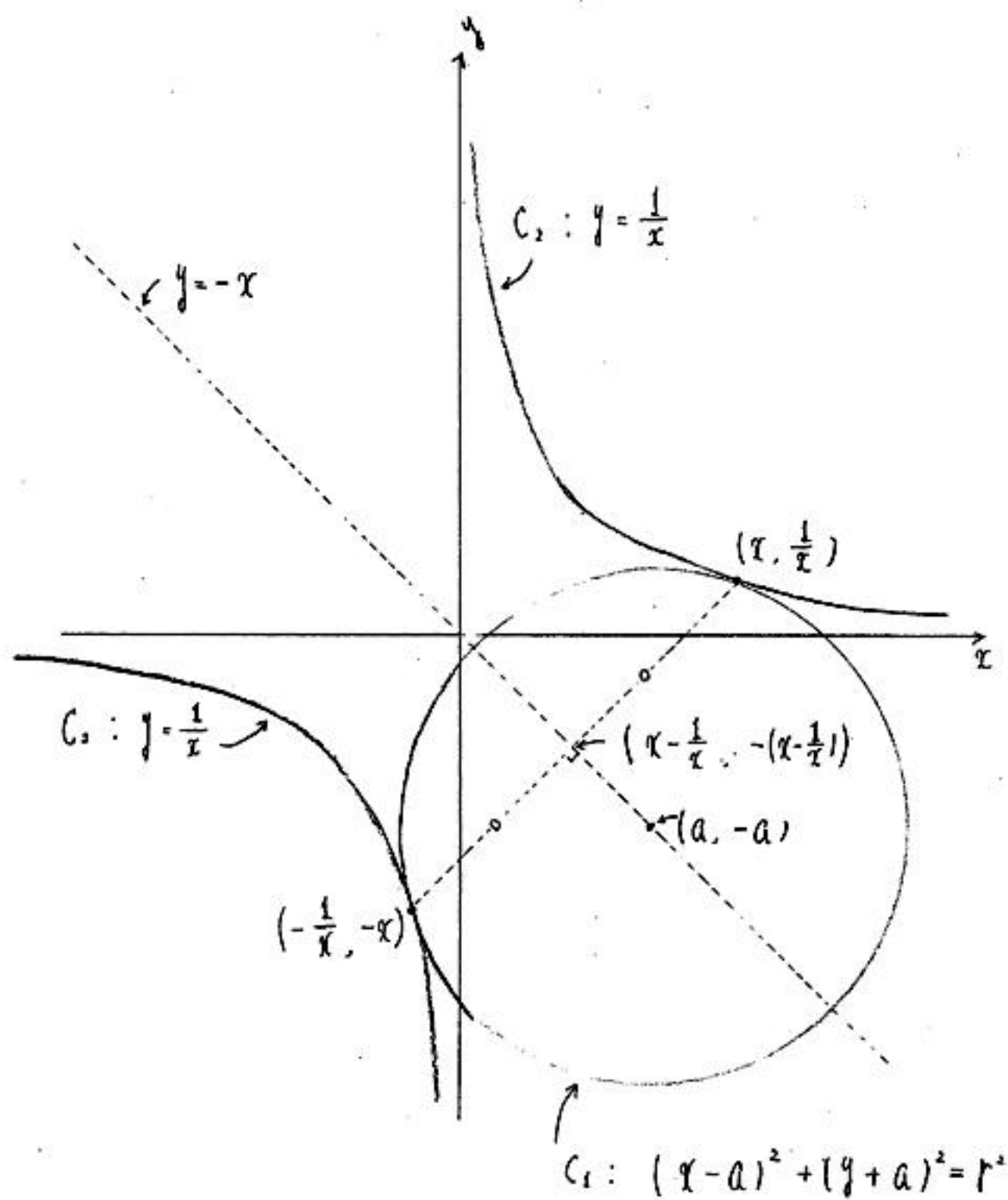
④ は、 $y = -x$ に関して対称な接点③の中点の x 座標を表す。これから、

① ② が、2 点で接する。

$$\Leftrightarrow -a^2 - 2 + r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 = a^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow \underline{r = \sqrt{a^2 + 2}} \quad \therefore r > 0 \quad \text{(答)}$$



$$(1) aC_3 + bC_2 + cC_1 = 29$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a-1)(a-2)}{6} + \frac{b(b-1)}{2} + c = 29 \dots \textcircled{1}$$

初めに、 $\textcircled{1}$ を満たす a の最大値を求めよう。 aC_3 ($a \geq 3$), bC_2 ($b \geq 2$), cC_1 ($c \geq 1$) はそれぞれ a, b, c の単調増加数列であることに注意する。----- (*)

$$\frac{a(a-1)(a-2)}{6} \leq \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} < 29 < \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6}$$

よって

$$a \leq 6 \dots \textcircled{2}$$

次に、 $a=6$ の時の $\textcircled{1}$ を満たす b の最大値を求めよう。

$$\frac{b(b-1)}{2} \leq \frac{4 \cdot 3}{2} < 9 < \frac{5 \cdot 4}{2}$$

よって

$$b \leq 4 \dots \textcircled{3}$$

最後に、 $\textcircled{1} \textcircled{2}$ より

$$(a, b, c) = (6, 4, 3) \dots \textcircled{4}$$

12.

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} + \frac{4 \cdot 3}{2} + 3$$

$$= 29$$

よって、 $a > b > c$ を満たす $\textcircled{1}$ の自然数解である。また、 $\textcircled{4}$ 以外の $a > b > c$ を満たす (a, b, c) について 12. 再び (*) に注意して

$$aC_3 + bC_2 + cC_1 < 29$$

より、すべて不適となる。

以上より

$$\underline{(a, b, c) = (6, 4, 3)} \dots \text{答}$$

$$(2) \text{ (左辺)} = n+3 C_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= n+2 C_2 + n+1 C_2 + n C_1 + 1 \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n}{2} + n + 1 \\ &= \frac{(n+1) \{ (n+2)n + 3n + 6 \}}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \end{aligned}$$

よって

$$\text{(左辺)} = \text{(右辺)} //$$

$$(3) aC_3 > bC_3 + cC_2 + dC_1$$

$$\Leftrightarrow aC_3 - bC_3 - cC_2 - dC_1 > 0 \dots \textcircled{1}$$

以下 7-12. $\textcircled{1}$ を証明する。

第一段 b, c, d を固定して a を

$$a \geq b+1 \ (\geq 4)$$

の範囲で動かす。

$$\begin{aligned} \text{(①の左辺)} &\geq b+1 C_3 - bC_3 - cC_2 - dC_1 \\ &= bC_2 - cC_2 - dC_1 \quad \therefore (*) \end{aligned}$$

第二段 c, d を固定して b を

$$b \geq c+1 \ (\geq 3)$$

の範囲で動かす。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\geq c+1 C_2 - cC_2 - dC_1 \quad \therefore (*) \\ &= cC_1 - dC_1 \end{aligned}$$

第三段 d を固定して c を

$$c \geq d+1 \ (\geq 2)$$

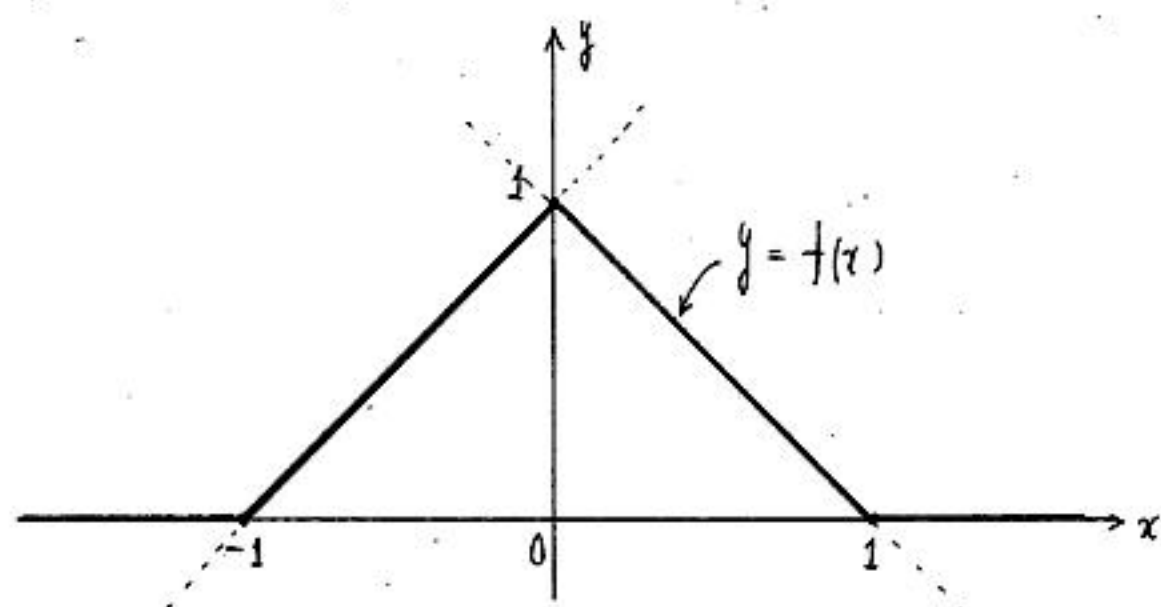
の範囲で動かす。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\geq d+1 C_1 - dC_1 \quad \therefore (*) \\ &= 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

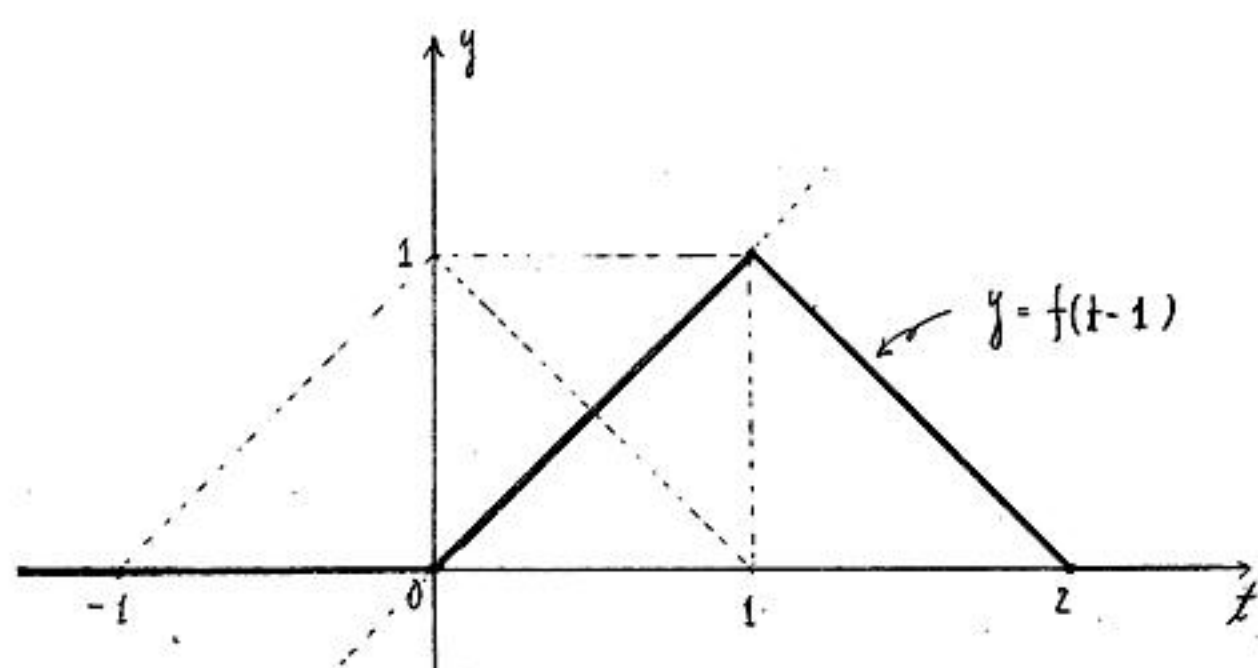
よって、与不等式は証明された。 //

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(x) &= \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 - x & (0 \leq x \leq 1) \\ 1 + x & (-1 \leq x \leq 0) \\ 0 & (1 < x) \\ 0 & (x < -1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

よって $y = f(x)$ のグラフは次の通り.



$$\begin{aligned}
 (2) \quad g(1) &= \int_0^1 f(t-1) dt \\
 &= \int_0^1 t dt \\
 &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \quad \text{--- (答)}
 \end{aligned}$$



(3) $y = f(t-x)$ のグラフは $y = f(t)$ のグラフを x 軸方向に x だけ平行移動して得られる.

(I) $2 \leq x$ の場合

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^1 0 dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(II) $1 \leq x < 2$ の場合

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^{x-1} 0 dt + \int_{x-1}^1 \{t - (x-1)\} dt \\
 &= \left[\frac{1}{2} t^2 - (x-1)t \right]_{x-1}^1 \\
 &= \frac{1}{2} - (x-1) - \left\{ \frac{1}{2}(x-1)^2 - (x-1)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (x-2)^2
 \end{aligned}$$

(III) $0 \leq x < 1$ の場合

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^x \{t - (x-1)\} dt + \int_x^1 \{-t + (x+1)\} dt \\
 &= \left[\frac{1}{2} t^2 - (x-1)t \right]_0^x + \left[-\frac{1}{2} t^2 + (x+1)t \right]_x^1 \\
 &= \frac{1}{2} x^2 - (x-1)x - \frac{1}{2} + (x+1) \\
 &\quad - \left\{ -\frac{x^2}{2} + (x+1)x \right\} \\
 &= -x^2 + x + \frac{1}{2} \\
 &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

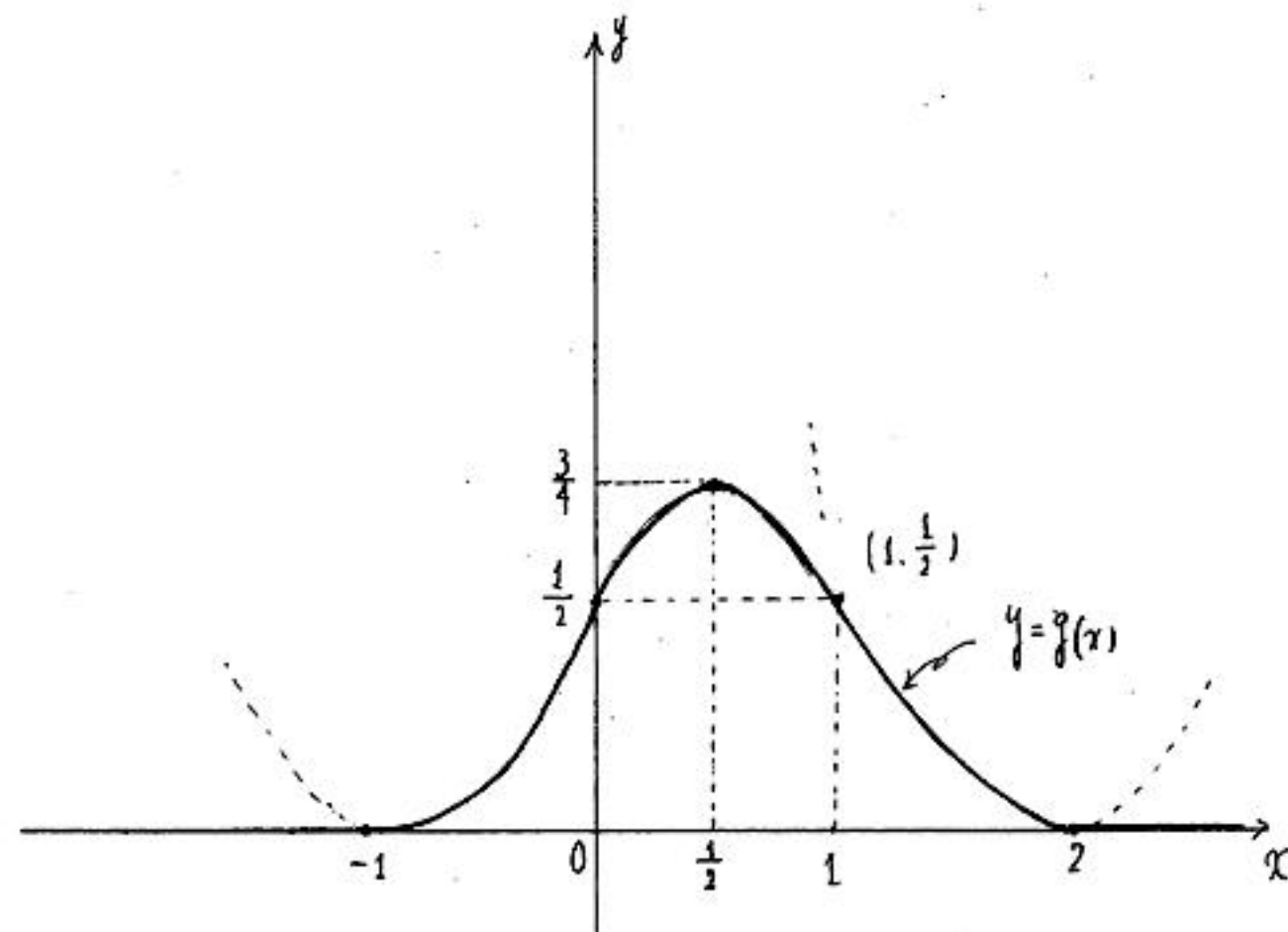
(IV) $-1 \leq x < 0$ の場合

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^{x+1} \{-t + (x+1)\} dt + \int_{x+1}^1 0 dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2} t^2 + (x+1)t \right]_0^{x+1} \\
 &= -\frac{1}{2} (x+1)^2 + (x+1)^2 \\
 &= \frac{1}{2} (x+1)^2
 \end{aligned}$$

(V) $x < -1$ の場合

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^1 0 dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

以上 (I) ~ (V) より $y = g(x)$ のグラフは次の通り.



$$(1) C_1: (x-1)^2 + y^2 = 1^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$C_2: (x+b)^2 + y^2 = (b+1)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① ② より y を消去して

$$(x-1)^2 - (x+b)^2 = 1 - (b+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+2b}{2(1+b)} \quad \cdots \cdots \text{答}$$

(2) P の座標を (p_x, p_y) とおく。この時

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2p_x - p_x^2}}{\sqrt{2p_x}} \quad \because \begin{cases} (p_x - 1)^2 + p_y^2 = 1 \\ p_y > 0 \end{cases} \\ &= \sqrt{1 - \frac{p_x}{2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+2b}{2(1+b)}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3+2b}{1+b}} \quad \cdots \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(3) B から直線 AP へ下ろした垂線の足を H とする。 $\triangle ABP$ は

$$AP = BP = b+1$$

なる二等辺三角形であるから、 H は AB の中点となる。よって

$$BH^2 + HA^2 = AB^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{AP}{2}\right)^2 + HA^2 = AB^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{20}{9}\right)^2 = (b+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{41}{18^2} = (b+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{41}{18} = b+1 \quad \because b+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{23}{18} \quad \cdots \cdots \text{答}$$

よって (2) の結果より

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3+2\frac{23}{18}}{1+\frac{23}{18}}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{41}} \quad \cdots \cdots \text{答} \end{aligned}$$

