

$$(1) \quad y = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$P(p, \frac{1}{p})$ における C_1 の法線の方程式は

$$y - \frac{1}{p} = p^2(x - p)$$

$$\Leftrightarrow y = p^2 x - p^3 + \frac{1}{p} \quad \dots\dots \text{答}$$

..... ①

$$(2) \quad C_1: y = \frac{1}{x} \quad \dots\dots ②$$

$$C_2: (x - g)^2 + (x + g)^2 = r^2 \quad \dots\dots ③$$

②③ は、ともに $y = -x$ に関して対称である。これから

②③ が、ちょうど 2 個の共有点を持つ。

$\Leftrightarrow$ ②③ は、 $y = -x$ に対称な 2 つの接点を持つ。

$\Leftrightarrow$ ① が ③ の中心 $(g, -g)$ を通る。

$$\Leftrightarrow -g = p^2 g - p^3 + \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow 0 = g(p^2 + 1) + \frac{(p^2 + 1)(p^2 - 1)}{p}$$

$$\Leftrightarrow g = p - \frac{1}{p} \quad \dots\dots ④ \quad p^2 + 1 > 0$$

よって

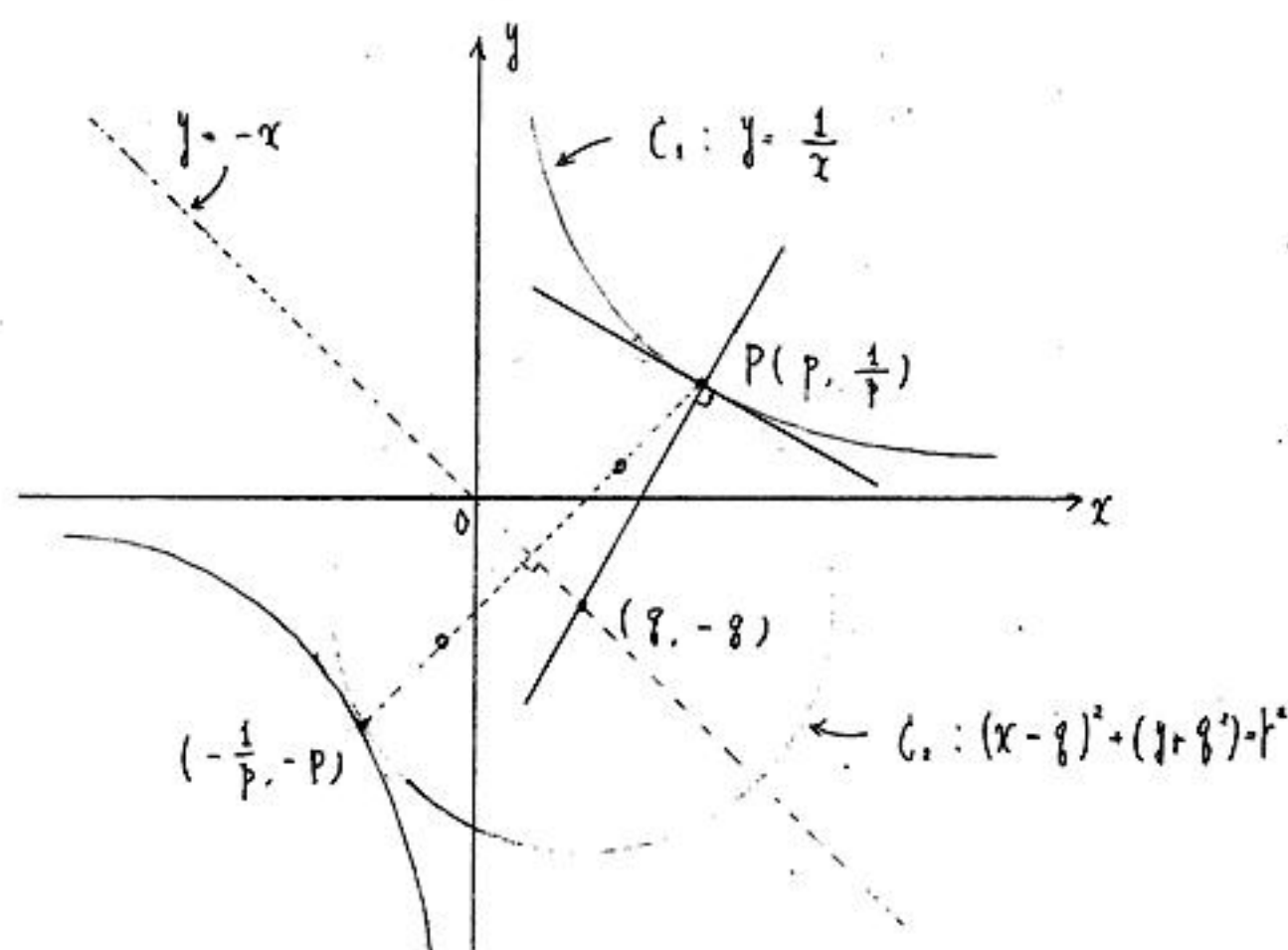
$$r = PQ$$

$$= \sqrt{(p - g)^2 + \left(\frac{1}{p} + g\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 - 2g\left(p - \frac{1}{p}\right) + 2g^2}$$

$$= \sqrt{g^2 + 2 - 2g^2 + 2g} \quad \therefore ④$$

$$= \sqrt{g^2 + 2} \quad \dots\dots \text{答}$$



$$(1) f(x) = \frac{\log(x+1)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \log(x+1)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\log(x+1)}{x^2} \quad \dots\dots (答)$$

$$(2) (a+1)^b > (b+1)^a$$

$$\Leftrightarrow b \log(a+1) > a \log(b+1) \quad \because \left[\begin{array}{l} \log x \text{ は 単調} \\ \text{増加関数で} \\ \text{ある} \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log(a+1)}{a} > \frac{\log(b+1)}{b} \quad \dots\dots (*) \quad \therefore b > a > 0$$

(*) を証明するには.

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{x} \quad (x > 0)$$

が、単調減少関数であることを示す
はよい。

$$y = \log(x+1)$$

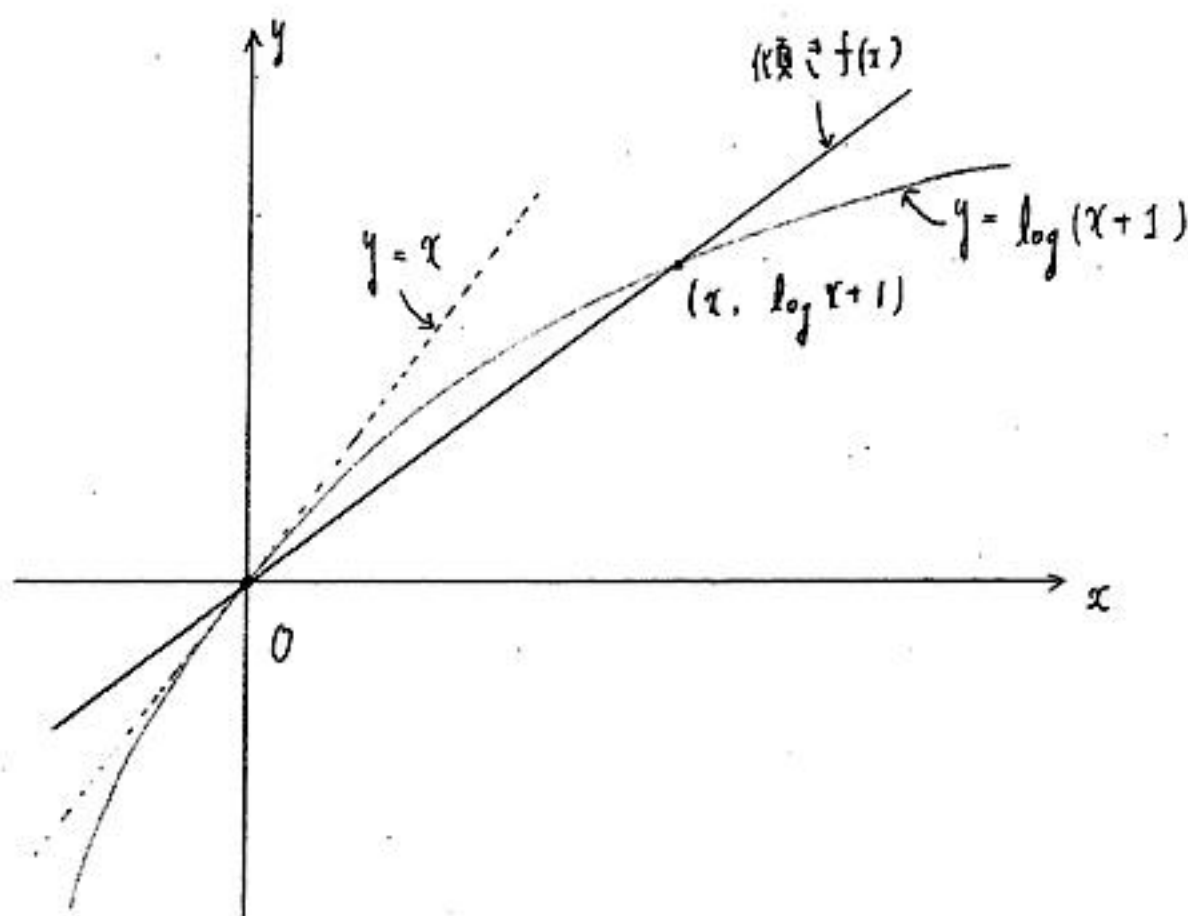
$$y' = \frac{1}{x+1} > 0$$

$$y'' = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

よって、 $y = \log(x+1)$ は、上に凸なグラフ

である。よって、 $f(x)$ と原点と、 $(x, \log(x+1))$
とを通る直線の傾きとみなすと、 $f(x)$
は、 $x > 0$ で、単調減少する。

よって、与不等式は、証明された。 //



$$\begin{aligned}
 (1) \quad A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2+(-1)^1 \end{pmatrix} A_2 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2+(-1)^2 \end{pmatrix} A_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 38 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

よ、 $l_3 = 38$

$$\underline{l_3 = 38} \quad \dots \dots \text{答}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad A_{2n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2+(-1)^{2n+1} \end{pmatrix} A_{2n} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2+(-1)^{2n} \end{pmatrix} A_{2n-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2n-1} & b_{2n-1} \\ c_{2n-1} & d_{2n-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2n-1} & b_{2n-1} \\ c_{2n-1} & d_{2n-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} * & b_{2n-1} + 12 d_{2n-1} \\ * & 3 d_{2n-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

よ、 l_3

$$\begin{cases} b_{2n+1} = b_{2n-1} + 12 d_{2n-1} & \dots \dots \text{①} \\ d_{2n+1} = 3 d_{2n-1} & \dots \dots \text{②} \end{cases}$$

② よ、 $d_{2n+1} = 3^{n-1} \cdot d_3$

$$\begin{aligned}
 &= 3^{n-1} \cdot 3^2 \\
 &= 3^{n+1} \quad \dots \dots \text{③}
 \end{aligned}$$

よ、 l_3 ① ③ よ、 l_3

$$b_{2n+1} = b_{2n-1} + 12 \cdot 3^n$$

$$\Leftrightarrow b_{2n+1} - b_{2n-1} = 12 \cdot 3^n \quad \dots \dots \text{④}$$

よ、 l_3 ④ よ、 $n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^n (b_{2k+1} - b_{2k-1}) = \sum_{k=1}^n 12 \cdot 3^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow b_{2n+1} - b_3 = 12 \cdot 3^2 \cdot \frac{1-3^n}{1-3}$$

$$\Leftrightarrow b_{2n+1} = 6 \cdot 3^2 (3^n - 1) + b_3$$

$$\Leftrightarrow b_{2n+1} = 2 \cdot 3^{n+2} - 16 \quad \therefore (1)$$

よ、 l_3

$$b_{2n+1} = 2 \cdot 3^{n+2} - 16 \quad (n \geq 2) \quad \dots \dots \text{⑤}$$

また、⑤より $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}
 b_3 &= 2 \cdot 3^{1+2} - 16 \\
 &= 38
 \end{aligned}$$

よ、 l_3 ⑤より成立する。

よ、 l_3

$$\underline{b_{2n+1} = 2 \cdot 3^{n+2} - 16 \quad (n \geq 1)} \quad \dots \dots \text{答}$$

(3) $b_{2n} (n \geq 1)$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 A_{2n+2} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2+(-1)^{2n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & b_{2n+1} \\ * & d_{2n+1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} * & b_{2n+1} + 3 d_{2n+1} \\ * & (*) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

よ、 l_3

$$b_{2n+2} = b_{2n+1} + 3 d_{2n+1}$$

$$= 2 \cdot 3^{n+2} - 16 + 3 \cdot 3^{n+1} \quad \therefore (2)$$

$$= 3^{n+3} - 16$$

よ、 l_3

$$b_{2n} = 3^{n+2} - 16 \quad (n \geq 1)$$

よ、 l_3

よ、 l_3

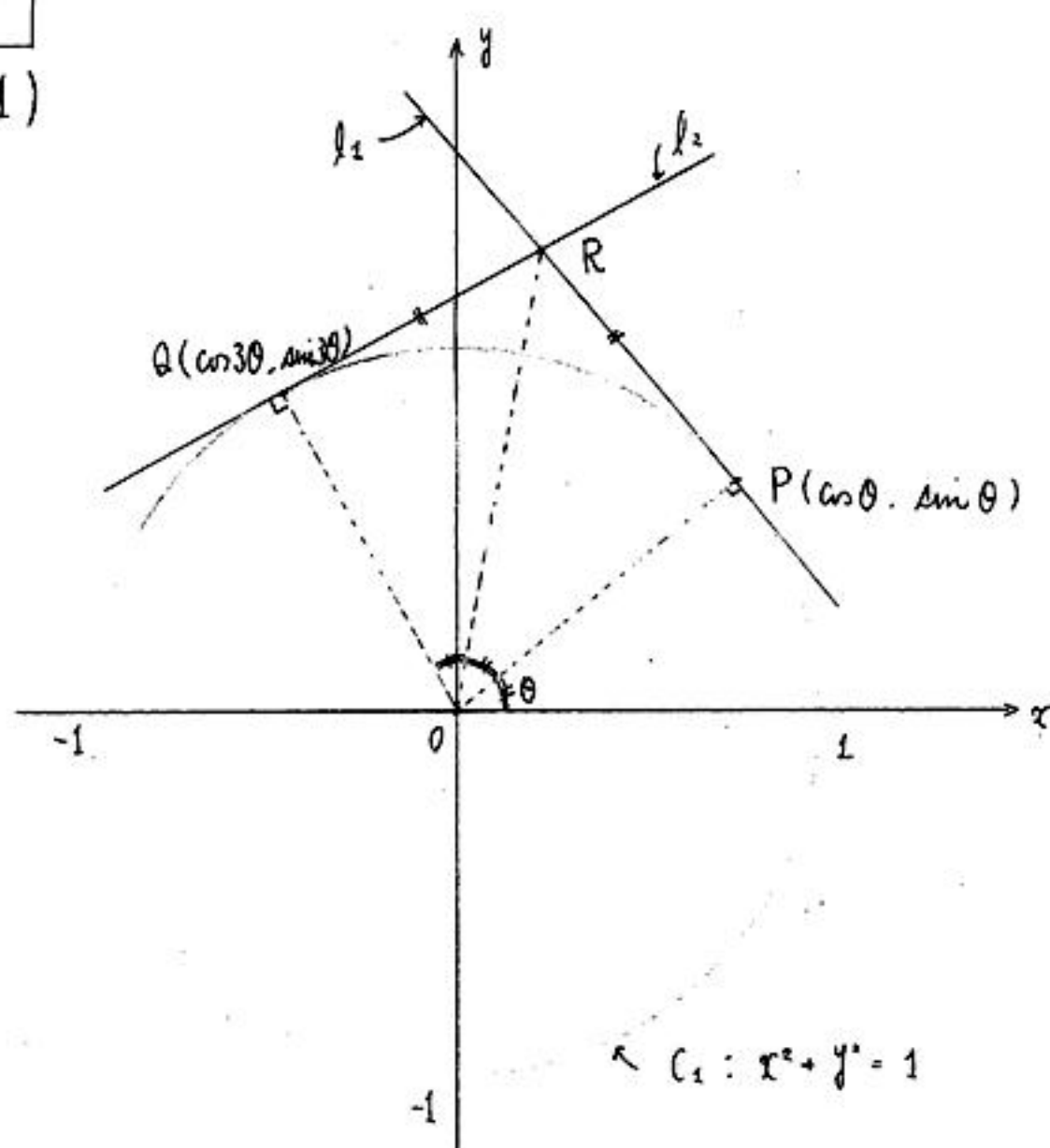
よ、 l_3

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^{n+2} - 16}{3^{n+2} - 16}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{16}{3^{n+2}}}{1 - \frac{16}{3^{n+2}}}$$

$$= \underline{2} \quad \dots \dots \text{答}$$

(1)



$$\angle RPO = \angle RQO = \frac{\pi}{2}$$

よって

$$\triangle OPR = \triangle OQR$$

である。よって、 $\overrightarrow{OR}$ と x 軸との正の方向となす角は 2θ となる。よって

$$\overrightarrow{OR} = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{PR}|^2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} \quad \because \left[\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4} \right] \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta} > 0$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

よって

$$(d, \theta) = \left(2 \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta}, 2 \sin \theta \right) \quad \dots (答)$$

- (2) θ が微小区間 $[\theta, \theta + \Delta\theta]$ に動くとき、線分 OR の掃過する微小面積 ΔS は、 R が反時計回りに原点の回りに動くことに注意して

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} \times \frac{1}{\cos(\theta + \Delta\theta)} \begin{pmatrix} \cos 2(\theta + \Delta\theta) \\ \sin 2(\theta + \Delta\theta) \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{2 \cos \theta \cos(\theta + \Delta\theta)} \cdot (\cos 2\theta \sin 2(\theta + \Delta\theta) - \sin 2\theta \cos 2(\theta + \Delta\theta)) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2 \cos \theta \cos(\theta + \Delta\theta)} \sin 2\Delta\theta$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\theta} &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta \cos(\theta + \Delta\theta)} \cdot \frac{\sin 2\Delta\theta}{2\Delta\theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

したがって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\theta = \frac{\pi}{6}}^{\theta = \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \left[\tan \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots (答) \end{aligned}$$

