

$$1 \quad a_1 = 1, a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad a_2 &= pa_1 + \frac{q-p}{2}q = p \cdot 1 + \frac{q-p}{2}q \\ &= \frac{(2-q)p + q^2}{2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= pa_2 + \frac{q-p}{2}q^2 = p \cdot \frac{(2-q)p + q^2}{2} + \frac{q-p}{2}q^2 \\ &= \frac{(2-q)p^2 + q^3}{2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= pa_3 + \frac{q-p}{2}q^3 \\ &= p \cdot \frac{(2-q)p^2 + q^3}{2} + \frac{q-p}{2}q^3 \\ &= \frac{(2-q)p^3 + q^4}{2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad (1) \text{より, } a_n = \frac{(2-q)p^{n-1} + q^n}{2} \quad (n \geq 1) \quad \dots \textcircled{A} \text{と推測できる.}$$

i) $n=1$ のとき,

$$a_1 = \frac{(2-q)p^0 + q}{2} = 1 \text{ となり, } \textcircled{A} \text{ は成り立つ.}$$

ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき, $\textcircled{A}$ が成り立つと仮定すると,

$$a_k = \frac{(2-q)p^{k-1} + q^k}{2}$$

このとき,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= pa_k + \frac{q-p}{2}q^k \\ &= p \cdot \frac{(2-q)p^{k-1} + q^k}{2} + \frac{q-p}{2}q^k \\ &= \frac{(2-q)p^k + q^{k+1}}{2} \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも $\textcircled{A}$ は成り立つ.

i), ii) より, すべての自然数 n に対して, $\textcircled{A}$ が成り立つことが示された. //

- (1) 最初の保有ポイントを A とすると、賭けたポイントは xA であるから、保有ポイントは、

$$\text{勝った場合, } A + 2xA = (1 + 2x)A \quad \underline{\underline{(1 + 2x) \text{ 倍}}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\text{負けた場合, } A - xA = (1 - x)A \quad \underline{\underline{(1 - x) \text{ 倍}}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2) 条件より、勝つ確率が p 、負ける確率が $1 - p$ であるから、倍率の期待値は、

$$(1 + 2x)p + (1 - x)(1 - p) = \underline{\underline{1 + (3p - 1)x}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (3) このゲームに 2 回参加して、2 勝する確率は、

$${}_2C_2 \left(\frac{2}{5} \right)^2 = \frac{4}{25}$$

同様にして、1 勝する確率、0 勝する確率は、それぞれ

$${}_2C_1 \left(\frac{2}{5} \right) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{12}{25}, \quad {}_2C_0 \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{9}{25}$$

よって、1 勝する確率が最も高い $\dots\dots(\text{答})$

このときの保有ポイントは、勝・負、負・勝のいずれの場合も

$(1 + 2x)(1 - x)A$ であるから、

$$\begin{aligned} (1 + 2x)(1 - x) &= -2x^2 + x + 1 \\ &= -2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ であるから、 $x = \frac{1}{4}$ のとき、保有ポイントは最大となる。

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ の両辺を 2 乗すると,

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{1}{5} \text{ より, } 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{5} \quad \therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{2}{5} \dots \textcircled{1}$$

ここで,

$$\begin{aligned} (\cos\theta - \sin\theta)^2 &= 1 - 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 1 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \\ &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ より, $\cos\theta \leq 0$, $\sin\theta \geq 0$ であるから, $\cos\theta - \sin\theta < 0$

$$\text{よって, } \cos\theta - \sin\theta = -\frac{3}{\sqrt{5}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 三角関数の加法定理より,

$$\begin{aligned} 2\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) &= 2\left(\cos 2\theta \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2\theta \sin \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta \end{aligned}$$

ここで, (1) より,

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) \\ &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\text{また, } \textcircled{1} \text{ より, } \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{4}{5}$$

これらより,

$$\begin{aligned} 2\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{3}{5} - \frac{4\sqrt{3}}{5} \\ &= -\frac{3+4\sqrt{3}}{5} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(注) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ より, $\pi \leq 2\theta \leq 2\pi$ であるから,

$$\sin 2\theta \leq 0$$

よって, $\cos 2\theta$ の値から, 三角関数の相互関係 $\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ を用いて, $\sin 2\theta$ の値を求めることもできる.

ただし $\sin 2\theta$ は符号が定まらないので, $\sin 2\theta$ の値から相互関係を用いて, $\sin 2\theta$ の値を直接求めることはできない.

(3) まず, $2\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$, すなわち, $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq -\frac{1}{2}$ ②

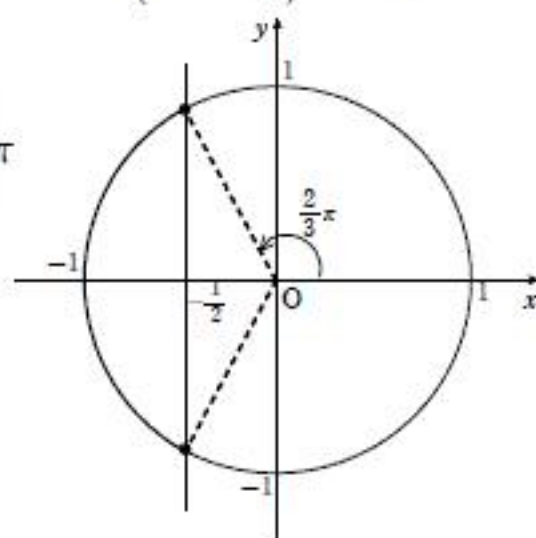
を満たす θ の値の範囲を求める.

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{ より, } \frac{2}{3}\pi \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{3}\pi$$

この範囲で②を満たすのは,
右図の太線部分であるから,

$$\frac{2}{3}\pi \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{よって, } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi \quad \dots\dots\textcircled{3}$$



③の範囲において, $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ のとりうる値の範囲を求めればよい.
ここで,

$$\begin{aligned} \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta &= 2\left(\sin\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\sin\theta \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } \frac{2}{3}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{6} \leq \pi$$

$$\text{よって, } 0 \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ であるから, } 0 \leq \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta \leq \sqrt{3}$$

以上より, $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ は

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき} & \text{最大値 } \sqrt{3} \\ \theta = \frac{5}{6}\pi \text{ のとき} & \text{最小値 } 0 \end{cases}$$

をとる.

$$\text{円 } C_1: x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{放物線 } C_2: y = x^2 + 5 \quad \dots\dots ①$$

(1) $P(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 l は,

$$\underline{x_1 x + y_1 y = 1} \quad \dots\dots ② \dots\dots (\text{答})$$

(注) ここでは、答えのみしか問われていないが、

接線は様々な方法で求められるようにしておこう。
最も単純な方法を1つだけ示しておく。

$x_1 \neq 0$ のとき OP の傾きは $\frac{x_1}{y_1}$ であるから、

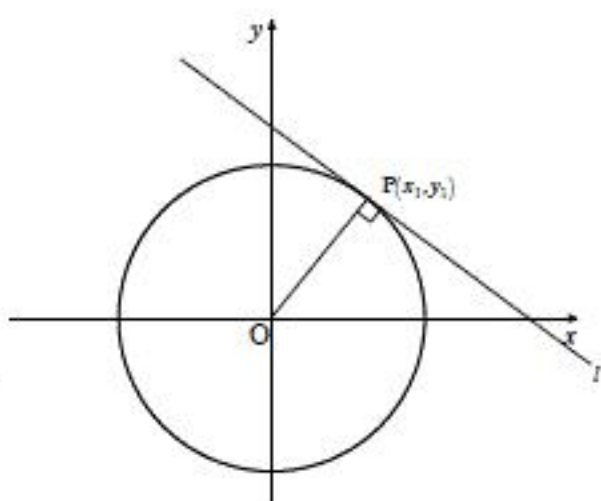
接線 l の傾きは $-\frac{x_1}{y_1}$

よって、接線 l は傾き $-\frac{x_1}{y_1}$, (x_1, y_1) を通るので、

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

すなわち、 $x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2 = 1$ となる。

($\because P(x_1, y_1)$ は円 C_1 上の点だから)



(2) 接線 l が放物線 C_2 と共有点をもつ。 $\iff$ ①かつ②を満たす実数 x が存在する。
が成り立つ。

①を②に代入すると、

$$x_1 x + y_1(x^2 + 5) = 1$$

$$\therefore y_1 x^2 + x_1 x + 5y_1 - 1 = 0 \quad \dots\dots ③$$

を満たす実数 x が存在する y_1 の範囲を求めればよい。

i) $y_1 = 0$ のとき、 $x_1 x = 1$ となるが、 $x_1 = \pm 1$ より、

$$x = \frac{1}{x_1} = \pm 1 \text{ となり、} l \text{ と } C_2 \text{ は共有点をもつ。}$$

ii) $y_1 \neq 0$ のとき、2次方程式③の判別式を D とすると、

$$D = x_1^2 - 4y_1(5y_1 - 1) \geq 0$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \text{ より、}$$

$$1 - y_1^2 - 20y_1^2 + 4y_1 \geq 0$$

$$21y_1^2 - 4y_1 - 1 \leq 0$$

$$(3y_1 - 1)(7y_1 + 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{7} \leq y_1 \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{i), ii) より、求める } y_1 \text{ の値の範囲は、} \underline{-\frac{1}{7} \leq y_1 \leq \frac{1}{3}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である。

(3) 接線 l が放物線 C_2 の接線となるとき、③は重解をもつので、

$$D = 0 \text{ より、} y_1 = -\frac{1}{7}, \frac{1}{3}$$

$$y_1 < 0 \text{ より、} y_1 = -\frac{1}{7} \text{ でこのとき、} x_1^2 = \frac{48}{49} \text{ すなわち、} x_1 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

x_1, y_1 の値を③に代入すると、

$$-\frac{1}{7}x^2 \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}x - \frac{12}{7} = 0$$

$$x^2 \pm 4\sqrt{3}x + 12 = 0$$

$$(x \pm 2\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\therefore x = \pm 2\sqrt{3}$$

これを①に代入すると、 $y = 17$

よって、求める接点の座標は

$$\underline{(\pm 2\sqrt{3}, 17)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(4)

右図の斜線部の面積を求めればよい。

(3) の2本の直線および C_2 は y 軸対称であるから、

求める面積 S は、

$$S = 2 \int_0^{2\sqrt{3}} \{x^2 + 5 - (4\sqrt{3}x - 7)\} dx$$

$$= 2 \int_0^{2\sqrt{3}} (x - 2\sqrt{3})^2 dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} (x - 2\sqrt{3})^3 \right]_0^{2\sqrt{3}}$$

$$= \underline{16\sqrt{3}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

