

(1)

ある1人が n を選ばない確率は $\frac{n-1}{n}$ である。

よって余事象を用いて

$$\text{(答)} \quad \underline{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^3}$$

(2)

a は任意の数, b は a と同じ数だからそれを引く確率は $\frac{1}{n}$, c は任意であるので,

$$\text{(答)} \quad \underline{\frac{1}{n}}$$

(3)

a, b が同じ数の場合を考える。

a は任意, b は a と同じ数なので $\frac{1}{n}$, c は a, b と違う数なので $\frac{n-1}{n}$ となる。
どの2人が同じ数となるかで ${}_3C_2 = 3$ 通りがあるので,

$$3 \times 1 \times \frac{1}{n} \times \frac{n-1}{n} = \frac{3(n-1)}{n^2}$$

$$\text{(答)} \quad \underline{\frac{3(n-1)}{n^2}}$$

(4)

3人が異なる数を選んで、小さい順に引いたと考えればよいので,

$$\frac{{}_n C_3}{n^3} = \frac{n^2 - 3n + 2}{6n^2}$$

$$\text{(答)} \quad \underline{\frac{n^2 - 3n + 2}{6n^2}}$$

(1)

q は 0 でないので両辺を q^{n+1} で割って,

$$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a_n}{q^n} + \frac{q-p}{2q^2} \dots \textcircled{1}$$

ここで $c_n = \frac{a_n}{q^n}$ と置換すると, $c_1 = \frac{1}{q}$ であるので,

(i) $p \neq q$ のとき

① より

$$\begin{aligned} c_{n+1} - \frac{1}{2q} &= \frac{p}{q} \left(c_n - \frac{1}{2q} \right) \\ c_n - \frac{1}{2q} &= \left(c_1 - \frac{1}{2q} \right) \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1} \\ c_n &= \frac{1}{2q} \left\{ \left(\frac{p}{q} \right)^{n-1} + 1 \right\} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

(ii) $p = q$ のとき

① より $c_{n+1} = c_n = c_1 = \frac{1}{q}$ である.

これは② に含まれる.

よって②より

$$a_n = q^n \cdot c_n = \frac{1}{2} (p^{n-1} + q^{n-1})$$

$$\underline{\text{(答)} \quad a_n = \frac{1}{2} (p^{n-1} + q^{n-1})}$$

(2)

$$\begin{aligned} b_n &= (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n} \\ &= (-1)^{n-1} \log (n+2) - (-1)^{n-1} \log n \\ &= (-1)^n \log n - (-1)^{n+2} \log (n+2) \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx \\
 &= \left[-e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right]_0^a + \int_0^a e^{a-x} \cdot n \cdot \frac{1}{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \\
 &= \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx + e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \\
 &= \text{右辺}
 \end{aligned}$$

よって示された.

(2)

$a \geq 0, n \geq 1$ であるので $1 + \frac{a}{n} \geq 1$ となる.

よって

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \cdots \textcircled{1}$$

が成立する.

また

$$\begin{aligned}
 e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n &= \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx - \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx \\
 &= \int_0^a e^{a-x} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \right\} dx \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

ここで $a \geq 0$ より $\textcircled{2}$ 式の x は $x \geq 0$ であるので $\textcircled{1}$ と同様に,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq 0 \cdots \textcircled{3}$$

よって $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ より $\int_0^a e^{a-x} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \right\} dx \geq 0$ すなわち

$e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \geq 0 \cdots \textcircled{4}$ が成立する.

$\textcircled{1}, \textcircled{4}$ より

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq e^a$$

が成立することが示された.

(1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 - \sin t} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{1 - \cos t} \end{cases}$$

であるので、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 - \cos t} \cdot \frac{1 - \sin t}{1} = -\frac{1 - \sin t}{1 - \cos t}$ となる。
よって P における接線 l は

$$\begin{aligned} l: y &= -\frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta} \left(x - \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right) + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \\ &= -\frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta} x + \frac{\cos \theta + \sin \theta}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\text{(答)} \quad \underline{l: y = -\frac{1 - \sin \theta}{1 - \cos \theta} x + \frac{\cos \theta + \sin \theta}{1 - \cos \theta}}$$

(2)

$\alpha = \sin \theta + \cos \theta$ より $\alpha^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ である。

これから、 $\sin \theta \cos \theta = \frac{\alpha^2 - 1}{2}$ である。

x 軸との交点は $\left(\frac{\cos \theta + \sin \theta}{1 - \sin \theta}, 0 \right)$, y 軸との交点は $\left(0, \frac{\cos \theta + \sin \theta}{1 - \cos \theta} \right)$ であり、それぞれ値は正であるので、面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\cos \theta + \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(\cos \theta + \sin \theta)^2}{1 - (\cos \theta + \sin \theta) + \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \alpha + \frac{\alpha^2 - 1}{2}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{(答)} \quad \underline{S = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^2}$$