

(1) 1 回するとき (2)

2 回するとき (3,6), (4,4), (6,3)

3 回するとき (6,6,6)

4 回以上のとき最低でも $\frac{\pi}{6} \times 4 = \frac{2}{3}\pi$ となり不適。

(2) さいころを 4 回振ると最大で $\pi \times 4 = 4\pi$

すなわち $P_4 = P_0$ となるには 2π または 4π だけ回転すればよい。

このとき、組み合わせから考えると、

(1,1,1,1) が 1 通り、

(1,2,4,4) が $\frac{4!}{2!} = 12$ 通り、

(1,2,3,6) が $4! = 24$ 通り、

(1,3,3,3) が 4 通り、

(2,2,2,2) が 1 通り、

以上より、 $1 + 12 + 24 + 4 + 1 = 42$ 通り。

(3) 対称性から $P_2(1,0)$ とおいてよい。

このとき

$$\begin{aligned} P_1 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right), \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \\ = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

$\triangle P_1 P_2 P_3$ の面積が最大となるには、

$P_1 P_2$ を底辺としたときの高さが最大、すなわち直線 $P_1 P_2$ と点 P_3

との距離が最大となればよい。ここで、直線 $P_1 P_2$ の方程式は

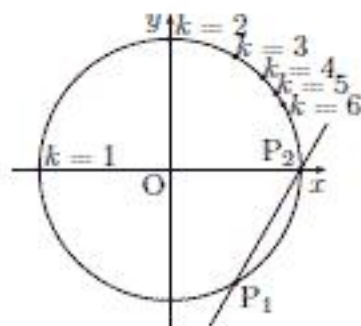
$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$

$k=1$ のとき P_3 は $(-1,0)$ 。

$$\text{このとき、距離は } \frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} = \sqrt{3}.$$

$k=2$ のとき P_3 は $(0,1)$ 。

$$\text{このとき、距離は } \frac{|-1 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$



図より明らかに $k \geq 2$ では直線 $P_1 P_2$ に近づく、よって、

$\triangle P_1 P_2 P_3$ の面積を最大にするのは 3 回目の目が 1 のとき。

(1) BC の傾きは $\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}{b - c} = \frac{1}{bc}$. よって, AH の方程式は $y = bcx - abc + \frac{1}{a}$.

また, CA の傾きは $-\frac{1}{ca}$ なので, BH の方程式は $y = cax - abc + \frac{1}{b}$.

このとき, H は AH と BH の交点より

$$\begin{aligned} bcx - abc + \frac{1}{a} &= cax - abc + \frac{1}{b} \\ \Leftrightarrow c(b-a)x &= \frac{a-b}{ab} \quad \therefore x = -\frac{1}{abc} \end{aligned}$$

よって, H の座標は $\left(-\frac{1}{abc}, -abc\right)$.

これは $y = \frac{1}{x}$ を満たすので, 点 H は曲線 K 上にある.

(2) $\triangle ABH$ の垂心を H' とおく.

(1) より, AH の傾きは bc なので, BH' の方程式は $y = -\frac{1}{bc}x + \frac{1}{c} + \frac{1}{b}$.

また, BH の傾きは ca より, AH' の方程式は $y = -\frac{1}{ca}x + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$.
 H' は BH' と AH' との交点より,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{bc}x + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} &= -\frac{1}{ca}x + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{c} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) x &= \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \quad \therefore x = c \end{aligned}$$

よって, H' の座標は $\left(c, \frac{1}{c}\right)$.

これは C と一致する.

(1)

$$\begin{aligned}
 & y_1 + y_2 + y_3 \\
 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
 &= (a_1 + b_1 + c_1)x_1 + (a_2 + b_2 + c_2)x_2 + (a_3 + b_3 + c_3)x_3 \\
 &= x_1 + x_2 + x_3 \quad (\because (は))
 \end{aligned}$$

(2) $y_1 < x_1$ を仮定する.

$$(い)より y_1 < x_1 \leq x_2 \leq x_3$$

このとき,

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 > a_1y_1 + a_2y_1 + a_3y_1 = y_1 \quad (\because (に))$$

これは明らかに矛盾している. よって背理法により $y_1 \geq x_1$ が証明された.

(3)

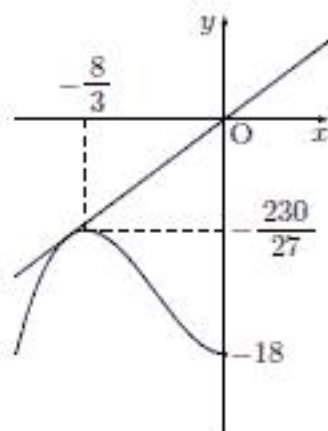
$$\begin{aligned}
 y_1 + y_2 &= (a_1 + b_1)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 + (a_3 + b_3)x_3 \\
 &= (a_1 + b_1)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 + (1 - c_3)x_3 \quad (\because (は)) \\
 &= (a_1 + b_1)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 + (c_1 + c_2)x_3 \quad (\because (に)) \\
 &\geq (a_1 + b_1)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 + c_1x_1 + c_2x_2 \quad (\because (い)) \\
 &= (a_1 + b_1 + c_1)x_1 + (a_2 + b_2 + c_2)x_2 \\
 &= x_1 + x_2
 \end{aligned}$$

よって $y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2$.

(1) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 18$ とおく.

$$f'(x) = 3x^2 + 8x = 3x \left(x + \frac{8}{3} \right)$$

x	...	$-\frac{8}{3}$	...	0
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{230}{27}$	$\searrow$	-18



よって、 $y = f(x)$ のグラフの概形は右のとおり。

ここで、 $y = f(x)$ と $y = ax$ が接するとき、接点の x 座標を t ($t < 0$) とおく。このとき、接線の方程式を t を用いて表わすと、

$$y = (3t^2 + 8t)x - 2t^3 - 4t^2 - 18$$

これが原点を通るので、

$$\begin{aligned} -2t^3 - 4t^2 - 18 &= 0 \Leftrightarrow (t+3)(t^2 - t + 3) = 0 \\ t < 0 \text{ より, } t &= -3 \end{aligned}$$

このとき、接線の傾きは 3。よって、図より a の範囲は $a \leq 3$ 。

(2) (1) より $a_0 = 3$ を代入して、

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 &\leq 3x + 18 \\ \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 3x - 18 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)^2(x-2) &\leq 0 \\ \therefore x &\leq 2 \end{aligned}$$