

(1)

A が逆行列をもつと仮定する。

$AB=O$ に左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}AB=B=O$$

となり、 $B \neq O$ という条件に矛盾する。したがって、 A は逆行列をもたないので、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

とおくと

$$ad - bc = 0$$

$$\therefore A^2 = (a+d)A = \alpha A$$

同様に、 B も逆行列を持たないので、 $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とおくと

$$eh - fg = 0$$

$$\therefore B^2 = (e+h)B = \beta B$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$\alpha = \beta = 1$ より

$$A^2 = A, \quad B^2 = B$$

となる。

ここで、 $C = A + B$ とおくと

$$C^2 = (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2 = A + B = C \quad (\because AB = BA = O)$$

また、 $C = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ を(*)に代入すると

$$C^2 = (a+d+e+h)C - \{(a+e)(d+h) - (b+f)(c+g)\}E$$

となる。 $C^2 = C$ を上式に代入して、整理すると

$$(a+d+e+h-1)C = \{(a+e)(d+h) - (b+f)(c+g)\}E$$

となる。 $\alpha = \beta = 1$ より、 $a+d=e+h=1$ だから、

$$a+d+e+h-1=1$$

となるので、 $C = kE$ (k は実数) とおける。

これを $C^2 = C$ に代入して

$$k^2E = kE$$

$$\Leftrightarrow k(k-1)E = O$$

$E \neq O$ より

$$k = 0, 1$$

となる。ここで、 $k=0$ と仮定すると

$$C = A + B = O$$

$$\Leftrightarrow B = -A$$

したがって

$$AB = -A^2 = -A = O \quad \therefore A = O$$

となり、条件に反する。以上より

$$A + B = E$$

が示された。

(証明終)

3

(1)

与式は初項 x^2 、公比 $\frac{1}{1+x^2-x^4}$ の数列の無限級数である。この無限級数が収束するのは、

この数列の(初項)=0、または $|\text{公比}| < 1$ であればよいので

$$x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

または

$$\left| \frac{1}{1+x^2-x^4} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^4 > 0, x^2 - x^4 < -2$$

ここで

$$x^2 - x^4 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 0, 0 < x < 1$$

となり

$$x^2 - x^4 < -2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < x$$

となるので、

$$x < -\sqrt{2}, -1 < x < 0, 0 < x < 1, \sqrt{2} < x$$

となればよい。以上より、 x の範囲は

$$x < -\sqrt{2}, -1 < x < 1, \sqrt{2} < x$$

となる。

(答) $x < -\sqrt{2}, -1 < x < 1, \sqrt{2} < x$

(2)

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2-x^4}} = \frac{1+x^2-x^4}{1-x^2}$$

だから

$$h(x) = \frac{1+|x|-x^2}{1-|x|} - |x| = \frac{1}{1-|x|}$$

となるので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$$

となる。

(答) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$

(3)

$$\frac{h(x)-a}{x} = \frac{\frac{1}{1-|x|}-1}{x} = \frac{|x|}{x(1-|x|)}$$

である。ここで、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{h(x)-a}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow -0} \frac{h(x)-a}{x} = -1$$

となり、 $x \rightarrow +0$ のときと、 $x \rightarrow -0$ のときの極限值が異なるので

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-a}{x}$ は存在しない。

(答) 存在しない

4

(1)

$$f(0)=2(x-1)e^{\frac{1}{2}x}=2\cdot(-1)\cdot e=-2e\neq 0$$

となるので、

$$f(x)=ax$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)e^{\frac{1}{2}x}}{x}=a$$

となる。 $g(x)=\frac{2(x-1)e^{\frac{1}{2}x}}{x}$ とおくと

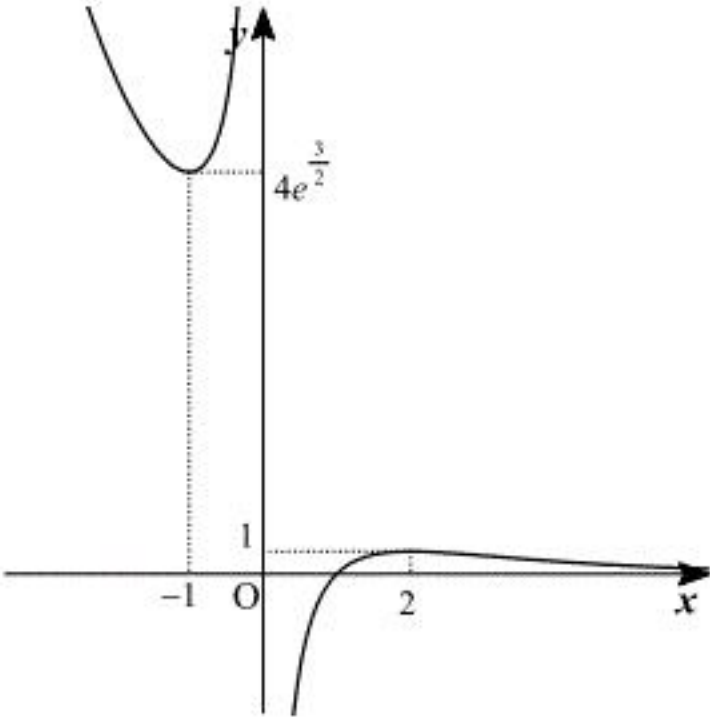
$$g'(x)=-\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}g(x)=+\infty, \lim_{x\rightarrow 0}g(x)=+\infty, \lim_{x\rightarrow +0}g(x)=-\infty, \lim_{x\rightarrow +\infty}g(x)=0$$

だから、 $g(x)$ の増減表は次の通りである。

x	...	-1	...	0	...	2	...
$g'(x)$	-	0	+		+	0	-
$g(x)$	$\searrow$	$4e^{\frac{3}{2}}$	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$

したがって $y=g(x)$ のグラフは次図の通りである。



曲線 C と l の共有点の個数は、 $y=g(x)$ と $y=a$ の共有点の個数に等しく、共有点の個数が 2 個となるのは、 前のグラフより

$$0 < a < 1, 4e^{\frac{3}{2}} < a$$

のときである。

(答) $0 < a < 1, 4e^{\frac{3}{2}} < a$

(2)

$$f'(x)=(3-x)e^{\frac{1}{2}x} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。 C と l が第 1 象限で接するときについて考える。接点の x 座標を $t(>0)$ とすると、 l は t を利用して、

$$y=(3-t)e^{\frac{1}{2}t}\cdot(x-t)+2(t-1)e^{\frac{1}{2}t}$$

と書ける。これが原点を通るので、

$$(3-t)e^{\frac{1}{2}t}\cdot(-t)+2(t-1)e^{\frac{1}{2}t}=0$$

$$\Leftrightarrow (t^2-t-2)e^{\frac{1}{2}t}=0$$

$e^{\frac{1}{2}t}>0, t>0$ より $t=2$ 。このとき l は

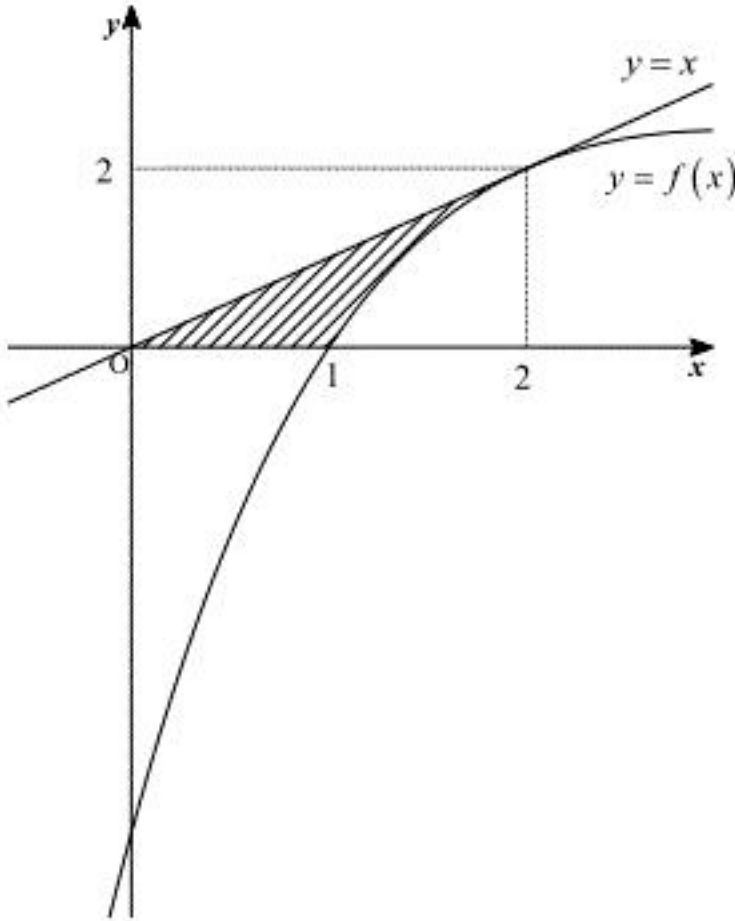
$$y=x$$

であり、確かに第 1 象限の点 $(2, 2)$ で C と l が接する。①と $\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=-\infty, \lim_{x\rightarrow+\infty}f(x)=0$ より、

$f(x)$ の増減表は次表のようになり、

x	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$4e^{\frac{1}{2}}$	$\searrow$

求める面積は次図斜線部の面積である。



これを S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} - \int_1^2 2(x-1)e^{\frac{1}{2}x} dx \\ &= 2 + \left[4(x-1)e^{\frac{1}{2}x} \right]_1^2 - \int_1^2 4e^{\frac{1}{2}x} dx \\ &= 2 + \left[4(x-1)e^{\frac{1}{2}x} + 8e^{\frac{1}{2}x} \right]_1^2 \\ &= 14 - 8\sqrt{e} \end{aligned}$$

となる。

(答) $14 - 8\sqrt{e}$