

平成 2 1 年度入学試験問題

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B)

注 意

- 1 問題冊子は 1 冊，解答用紙は 4 枚，下書き用紙は 3 枚です。
- 2 すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
- 3 解答は，すべて指定された解答用紙に書きなさい。
また，答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
ただし，裏面は採点の対象になりません。
- 4 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

1

1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき、単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\frac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として、次の問いに答えよ。

- (1) さいころを何回か振って、点 P の回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。
- (2) さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。 $P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。
- (3) さいころを 2 回振ったところ、1 回目は 4 の目、2 回目は 3 の目が出た。そのとき、三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような、3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。

2

三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は、1 点で交わることが知られている。この交点を三角形の「垂心」という。

いま、座標平面上の曲線 $K: y = \frac{1}{x}$ 上に 3 つの頂点 $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$, $C\left(c, \frac{1}{c}\right)$ をもつ三角形を考える。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 三角形 ABC の垂心 H は、曲線 K 上にあることを示せ。
- (2) 三角形 ABH の垂心は、点 C に一致することを示せ。

3

実数 x_i, a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) は、以下の条件 (い)～(に) を満たすものとする。

- (い) $x_1 \leq x_2 \leq x_3$
- (ろ) $i = 1, 2, 3$ に対して $a_i \geq 0, b_i \geq 0, c_i \geq 0$
- (は) $i = 1, 2, 3$ に対して $a_i + b_i + c_i = 1$
- (に) $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = 1$

実数 y_i ($i = 1, 2, 3$) を

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$

$$y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3,$$

$$y_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3,$$

により定義する。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3$ を示せ。
- (2) $y_1 \geq x_1$ を示せ。
- (3) $y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2$ を示せ。

4

次の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $x \leq 0$ において、常に $x^3 + 4x^2 \leq ax + 18$ が成り立っているものとする。このとき、 a の取りうる値の範囲を求めよ。
- (2) (1) で求めた範囲にある a のうち、最大のものを a_0 とするとき、不等式

$$x^3 + 4x^2 \leq a_0x + 18$$

を解け。