

(1)

男女が交互に座ればよい。左端に男性が座るような座り方は、

$$4! \cdot 4! = 576 \text{ (通り)}$$

であり、左端に女性が座るような座り方も、

$$4! \cdot 4! = 576 \text{ (通り)}$$

である。よって、同性同士が隣り合わない座り方は、

$$576 + 576 = 1152 \text{ (通り)}$$

である。

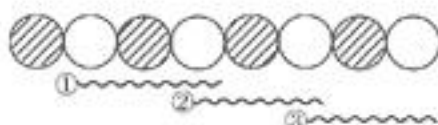
(答) 1152 通り

(2)

○で女性を、斜線が含まれている○で男性を表し、題意を満たすような座り方を、左端が男性か女性かで場合分けして考える。

[1] 左端が男性のとき

M_1, F_1, F_2 の3人が座る位置は、下図の①, ②, ③が考えられる。



F_1 と F_2 の並び方が2通りあり、その各々について、残りの男性と女性の並び方は、

$$3! \cdot 2! = 12 \text{ (通り)}$$

である。よって、座り方は合計で、

$$3 \cdot 2 \cdot 12 = 72 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 左端が女性のとき

M_1, F_1, F_2 の3人が座る位置は、下図の①, ②, ③が考えられる。



[1]と同様に考えると、座り方は合計で、

$$3 \cdot 2 \cdot 12 = 72 \text{ (通り)}$$

である。

以上から、 M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は、

$$72 + 72 = 144 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 144 通り

(3)

同性同士が隣り合わない座り方のうち、 M_1 と F_1 が隣り合う座り方が何通りあるかを考える。

[1] M_1 の両隣りが F_1 と、 F_2, F_3, F_4 の3人のいずれかのとき

このような座り方は、(2)を利用して

$$144 \cdot 3 = 432 \text{ (通り)}$$

である。

[2] M_1 が左端に座るとき

M_1 の右隣りに F_1 が座るので、このような座り方は、

$$3! \cdot 3! = 36 \text{ (通り)}$$

である。

[3] M_1 が右端に座るとき

M_1 の左隣りに F_1 が座るので、このような座り方は、

$$3! \cdot 3! = 36 \text{ (通り)}$$

である。

以上から、同性同士が隣り合わない座り方のうち、 M_1 と F_1 が隣り合うような座り方は、

$$432 + 36 + 36 = 504 \text{ (通り)}$$

である。よって、 M_1 と F_1 が隣り合わないような座り方は、

$$1152 - 504 = 648 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 648 通り

(1)

表の m 行目は初項 $(m+1)^2$ 、公差 $2m$ の等比数列であるから、その第 n 項は

$$m \circ n = (m+1)^2 + (n-1) \cdot 2m = m^2 + 2mn + 1$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} 8 \circ 1 + 8 \circ 2 + 8 \circ 3 + \cdots + 8 \circ 25 &= \sum_{k=1}^{25} 8 \circ k \\ &= \sum_{k=1}^{25} (8^2 + 2 \cdot 8k + 1) \\ &= 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 26 + 65 \cdot 25 \\ &= 6825 \end{aligned}$$

である。

(答) 6825

(2)

$$\begin{aligned} m \circ n &= 474 \\ \Leftrightarrow m^2 + 2mn + 1 &= 474 \\ \Leftrightarrow m(m+2n) &= 473 \end{aligned}$$

$1 \leq m \leq m+2n$ より、

$$(m, n) = (1, 236), (11, 16)$$

である。

(答) $(m, n) = (1, 236), (11, 16)$

(1)

 $a=b=1$ のとき、①は、

$$x^3+2x^2+2x+1=0$$

と表すことができる。よって、

$$x^3+2x^2+2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

である。

(答) $x=-1$

(2)

$$ax^3+ax^2+x^2+bx+x+b=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(ax^2+x+b)=0$$

となる。この方程式は、 a, b の値によらず $x=-1$ を必ず解に持つ。ここで、

$$ax^2+x+b=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を考える。①が $x=-1$ 以外の重解を持つ、または $x=-1$ とそれ以外の解を持つ条件を考えればよいので、①の解によって場合分けをする。[1] ①が $x=-1$ 以外の重解を持つとき①が重解を持つのは、①の判別式を D とすると、

$$D=1^2-4ab=0$$

$$\Leftrightarrow ab=\frac{1}{4}$$

が成り立つときである。このとき、①の重解は、

$$x=-\frac{1}{2a}$$

であり、これが -1 でない条件は、

$$-\frac{1}{2a} \neq -1$$

$$\Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$$

つまり、

$$(a, b) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

である。

[2] ①が $x=-1$ とそれ以外の解を 1 つ持つとき①が $x=-1$ を解に持つので、

$$a-1+b=0$$

$$\Leftrightarrow b=-a+1$$

が成立する。このとき①は、

$$ax^2+x-a+1=0$$

$$\Leftrightarrow (ax-a+1)(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1, \frac{a-1}{a}$$

であり、①が $x=-1$ 以外の解を持つのは、

$$\frac{a-1}{a} \neq -1$$

$$\Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$$

のときである。

以上[1], [2]より、求める条件は、

$$a+b=1 \text{ または } ab=\frac{1}{4} \quad \text{ただし } (a, b) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

である。

(答) $a+b=1$ または $ab=\frac{1}{4}$ ただし $(a, b) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(1)

$$y = x^2 \text{ より,}$$

$$y' = 2x$$

である。よって、直線 ℓ_1 の傾きは $2a$ であるので、直線 ℓ_2 の傾きは、 $-\frac{1}{2a}$ である。

よって、直線 ℓ_2 の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

と表すことができる。これと $y = x^2$ から y を消去して、

$$x^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2a}x - a^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = a, -a - \frac{1}{2a}$$

より、

$$b = -a - \frac{1}{2a}$$

である。さらに、直線 ℓ_1 の方程式は、

$$y = 2a(x-b) + b^2 = 2ax + b^2 - 2ab$$

であり、これと $y = x^2$ から y を消去して、

$$x^2 = 2ax + b^2 - 2ab$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax - b^2 + 2ab = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-b)(x+b-2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = b, 2a-b$$

を得る。よって、

$$c = 2a - b$$

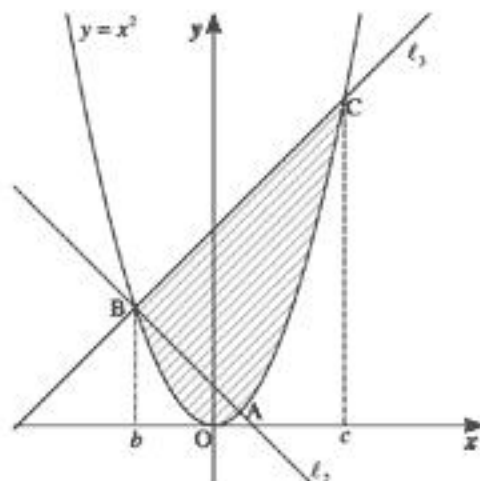
である。以上から、

$$\begin{aligned} b+c &= \left(-a - \frac{1}{2a}\right) + (2a-b) \\ &= a - \frac{1}{2a} - \left(-a - \frac{1}{2a}\right) \\ &= 2a \end{aligned}$$

であることが示される。

(証明終)

(2)



上図の斜線部が求める面積である。この面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_b^c \left\{ (2ax + b^2 - 2ab) - x^2 \right\} dx \\ &= - \int_b^c (x-b)(x-c) dx \\ &= \frac{1}{6}(c-b)^2 \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、

$$\begin{aligned} c-b &= (2a-b) - b \\ &= 2a-2b \\ &= 2a-2\left(-a-\frac{1}{2a}\right) \\ &= 4a+\frac{1}{a} \end{aligned}$$

であり、 $a > 0$ より、相加・相乗平均の関係から、

$$4a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{a}} = 4$$

が成り立つ。ただし等号は $a = \frac{1}{2}$ のとき成立する。これより、

$$S = \frac{1}{6} \left(4a + \frac{1}{a} \right)^2$$

であり、 S の最小値は、

$$\frac{1}{6} \cdot 4^2 = \frac{32}{3} \quad \left(a = \frac{1}{2} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{6} \left(4a + \frac{1}{a} \right)^2, \text{ 最小値は } a = \frac{1}{2} \text{ のとき } \frac{32}{3}$$