

1

(1)

男女が交互に座ればよい。左端に男性が座るような座り方は、

$$4! \cdot 4! = 576 \text{ (通り)}$$

であり、左端に女性が座るような座り方も、

$$4! \cdot 4! = 576 \text{ (通り)}$$

である。よって、同性同士が隣り合わない座り方は、

$$576 + 576 = 1152 \text{ (通り)}$$

である。

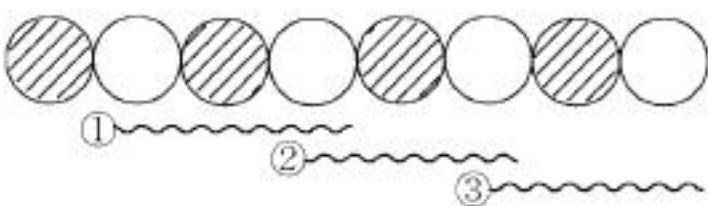
(答) 1152 通り

(2)

○で女性を、斜線が含まれている○で男性を表し、題意を満たすような座り方を、左端が男性か女性かで場合分けして考える。

[1] 左端が男性のとき

M_1, F_1, F_2 の 3 人が座る位置は、下図の①, ②, ③が考えられる。



F_1 と F_2 の並び方が 2 通りあり、その各々について、残りの男性と女性の並び方は、

$$3! \cdot 2! = 12 \text{ (通り)}$$

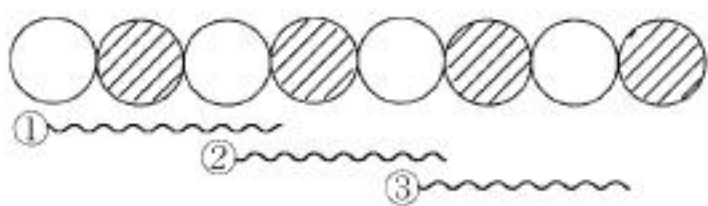
である。よって、座り方は合計で、

$$3 \cdot 2 \cdot 12 = 72 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 左端が女性のとき

M_1, F_1, F_2 の 3 人が座る位置は、下図の①, ②, ③が考えられる。



[1]と同様に考えると、座り方は合計で、

$$3 \cdot 2 \cdot 12 = 72 \text{ (通り)}$$

である。

以上から、 M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は、

$$72 + 72 = 144 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 144 通り

(3)

同性同士が隣り合わない座り方のうち、 M_1 と F_1 が隣り合う座り方が何通りあるかを考える。

[1] M_1 の両隣りが、 F_1 と、 F_2, F_3, F_4 の 3 人のいずれかのとき

このような座り方は、(2)を利用して

$$144 \cdot 3 = 432 \text{ (通り)}$$

である。

[2] M_1 が左端に座るとき

M_1 の右隣りに F_1 が座るので、このような座り方は、

$$3! \cdot 3! = 36 \text{ (通り)}$$

である。

[3] M_1 が右端に座るとき

M_1 の左隣りに F_1 が座るので、このような座り方は、

$$3! \cdot 3! = 36 \text{ (通り)}$$

である。

以上から、同性同士が隣り合わない座り方のうち、 M_1 と F_1 が隣り合うような座り方は、

$$432 + 36 + 36 = 504 \text{ (通り)}$$

である。よって、 M_1 と F_1 が隣り合わないような座り方は、

$$1152 - 504 = 648 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 648 通り

2

(1)

$$X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

とおく。題意の条件から、特に $n=1$ のとき

$$X\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

が成立することが必要である。よって、

$$a_3=4, a_4=7$$

より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。これが必要条件である。逆にこのとき、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_n + a_{n+1} & a_{n+1} + a_{n+2} \end{pmatrix}$$

であり、与えられた漸化式

$$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$$

を用いて、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_n + a_{n+1} & a_{n+1} + a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix}$$

であるから、

$$X\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix}$$

が成立するので、十分条件でもある。以上から、

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(答) $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2)

$$a_1a_3-a_2^2=1\cdot4-3^2=-5$$

$$a_2a_4-a_3^2=3\cdot7-4^2=5$$

より、

$$a_na_{n+2}-\left(a_{n+1}\right)^2=5\cdot\left(-1\right)^n \quad (n\geq1)$$

と推測される。これが成り立つことを、 n に関する数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

上記の計算より、成立する。

[2] $n=k$ で成立することを仮定する

$$a_ka_{k+2}-\left(a_{k+1}\right)^2=5\cdot\left(-1\right)^k$$

が成立し、この下で、

$$\begin{aligned} a_{k+1}a_{k+3}-\left(a_{k+2}\right)^2 &= a_{k+1}\left(a_{k+1}+a_{k+2}\right)-\left(a_{k+2}\right)^2 \\ &= \left(a_{k+1}\right)^2+a_{k+2}\left(a_{k+1}-a_{k+2}\right) \\ &= \left(a_{k+1}\right)^2+a_{k+2}\left\{a_{k+1}-\left(a_k+a_{k+1}\right)\right\} \\ &= \left(a_{k+1}\right)^2-a_{k+2}a_k \\ &= \left(a_{k+1}\right)^2-5\cdot\left(-1\right)^k-\left(a_{k+1}\right)^2 \\ &= 5\cdot\left(-1\right)^{k+1} \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ でも成立することが示される。

以上[1], [2]から、数学的帰納法より、

$$a_na_{n+2}-\left(a_{n+1}\right)^2=5\cdot\left(-1\right)^n \quad (n\geq1)$$

であることが示された。

(証明終)

(1)

$$P_1(\cos \theta, \sin \theta), \quad P_2\left(\frac{1}{2}\cos 3\theta, \frac{1}{2}\sin 3\theta\right) \text{ より,}$$

$$Q\left(\frac{2\cos \theta + \cos 3\theta}{4}, \frac{2\sin \theta + \sin 3\theta}{4}\right)$$

となる。ここで、 $t = \cos \theta$ とおくと、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ より、

$$0 < t \leq 1$$

である。これを用いると、点 Q の x 座標 Q_x は、

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{1}{4}(2\cos \theta + 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) \\ &= \frac{1}{4}(4\cos^3 \theta - \cos \theta) \\ &= \frac{1}{4}(4t^3 - t) \end{aligned}$$

と表すことができ、

$$f(t) = \frac{1}{4}(4t^3 - t)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{4}(12t^2 - 1) \\ &= 3\left(t^2 - \frac{1}{12}\right) \end{aligned}$$

であるから、 $f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{36}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$

これより、 $f(t)$ の値域は、

$$-\frac{\sqrt{3}}{36} \leq f(t) \leq \frac{3}{4}$$

である。

(答) $-\frac{\sqrt{3}}{36} \leq Q_x \leq \frac{3}{4}$

(2)

点 Q が y 軸上にあるのは、

$$Q_x = 0$$

のときであるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(4\cos^3 \theta - \cos \theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos \theta \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\cos \theta \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right) \left(\cos \theta + \frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

であり、ここで、

$$\begin{aligned} \{r(\theta)\}^2 &= \frac{1}{16} \left\{ (2\cos \theta + \cos 3\theta)^2 + (2\sin \theta + \sin 3\theta)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{16} \left\{ 4 + 1 + 4(\cos 3\theta \cos \theta + \sin 3\theta \sin \theta) \right\} \\ &= \frac{1}{16} \left\{ 5 + 4\cos(3\theta - \theta) \right\} \\ &= \frac{1}{16} (5 + 4\cos 2\theta) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \{r(\theta)\}^2 d\theta &= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (5 + 4\cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{16} \left[5\theta + 2\sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

である。

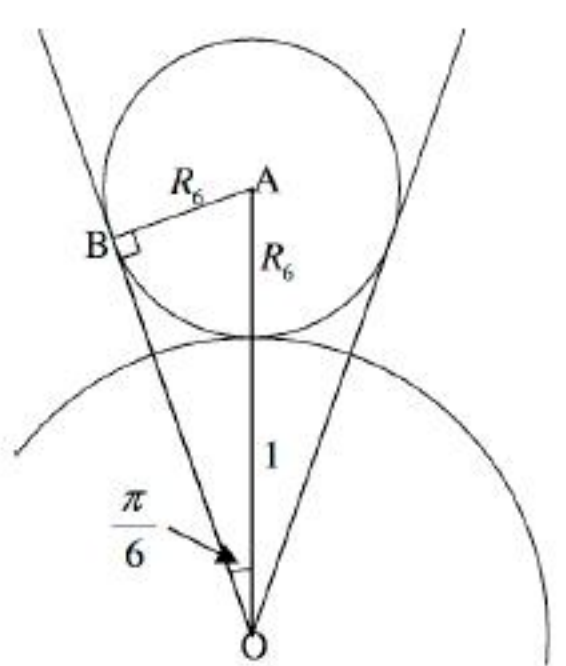
(答) $\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \int_0^\alpha \{r(\theta)\}^2 d\theta = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3} \right)$

(1)

円 C の中心を O とする。点 O から、外接する円の 1 つに引いた 2 本の接線は、 $\frac{\pi}{3}$ の角をなすので、図のように点 A, B を定め、三角形 OAB に正弦定理を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{1+R_6}{\sin \frac{\pi}{2}} &= \frac{R_6}{\sin \frac{\pi}{6}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1+R_6) &= R_6 \\ \Leftrightarrow R_6 &= 1\end{aligned}$$

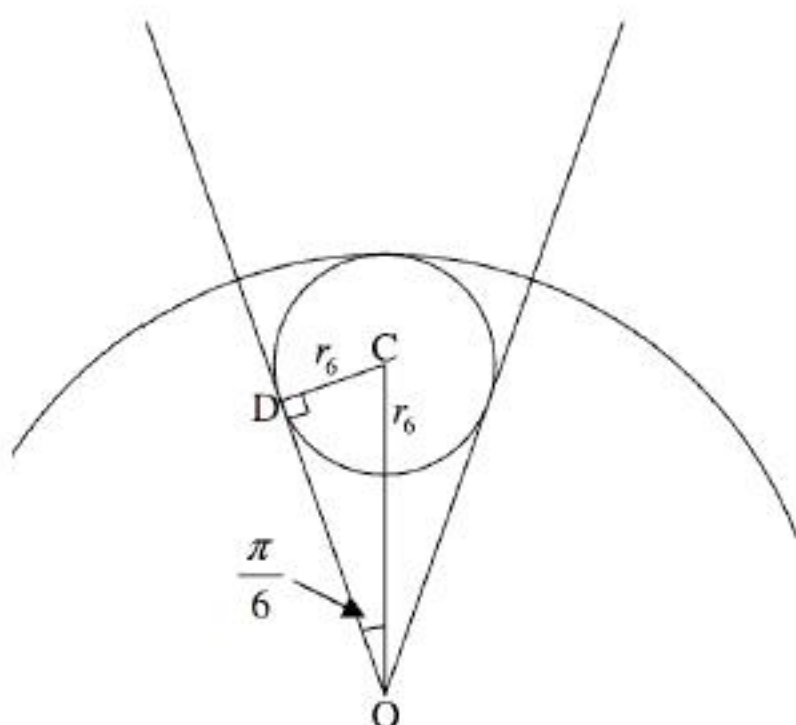
を得る。



円 C に内接する円に関しても考えることができ、図のように点 C, D を定め、三角形 OCD に正弦定理を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{1-r_6}{\sin \frac{\pi}{2}} &= \frac{r_6}{\sin \frac{\pi}{6}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-r_6) &= r_6 \\ \Leftrightarrow r_6 &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

を得る。



$$(\text{答}) \quad R_6 = 1, \quad r_6 = \frac{1}{3}$$

(2)

(1)と同様に考えると、点 O から外接する円の 1 つに引いた 2 本の接線は $\frac{2\pi}{n}$ の角をなすので、

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{n} &= \frac{R_n}{1+R_n} = \frac{r_n}{1-r_n} \\ \Leftrightarrow R_n &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1-\sin \frac{\pi}{n}}, \quad r_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

を得る。これを用いて、

$$\begin{aligned}n^2(R_n - r_n) &= n^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1-\sin \frac{\pi}{n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} \right) \\ &= \frac{n^2 \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} \right)}{1-\sin^2 \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{2n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(R_n - r_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right)^2 \cdot 2\pi^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \\ &= 2\pi^2\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2\pi^2$$