

$$\begin{cases} X: x \text{ 軸方向に } 1 \text{ だけ移動} \\ Y: y \text{ 軸方向に } 1 \text{ だけ移動} \\ Z: z \text{ 軸方向に } 1 \text{ だけ移動} \end{cases}$$

とおく.

(1) X, Y, Z が 2 回ずつ起こればよいので,

$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90 \text{ (通り)}$$

(2) 6 回中, X, Y, Z が 2 回ずつ起こればよいので,

$$\frac{6!}{2!2!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{72}$$

(3) はじめの 3 回が X, Y, Z 1 回ずつ, 次の 3 回が X, Y, Z 1 回ずつであればよいので,

$$\left\{ 3! \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \right\}^2 = \frac{1}{36}$$

$$\begin{cases} a_{2n+1} = a_{2n} + 1 = 2a_{2n-1} + 1 & \dots\dots ① \\ a_{2n+2} = 2a_{2n+1} = 2(a_{2n} + 1) = 2a_{2n} + 2 & \dots\dots ② \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots\dots)$$

(1) $a_2 = 2a_1 = 0$ より, ②から

$$a_4 = 2, a_6 = 6, a_8 = 14, a_{10} = 30$$

(2) n が奇数の場合

①より,

$$a_{n+4} = 2a_{n+2} + 1 = 2(2a_n + 1) + 1 = 4a_n + 3$$

n が偶数の場合

②より,

$$a_{n+4} = 2a_{n+2} + 2 = 2(2a_n + 2) + 2 = 4a_n + 6$$

$$(3) \quad \begin{cases} n \text{ が奇数のとき, } a_{n+4} - a_n = 3(a_n + 1) \\ n \text{ が偶数のとき, } a_{n+4} - a_n = 3(a_n + 2) \end{cases}$$

a_n は整数であるから, いずれの場合も $a_{n+4} - a_n$ は 3 で割り切れ,

a_{n+4} と a_n は 3 で割った余りが等しい. すなわち, a_n を 3 で割った余りは周期 4 で巡回する.

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 2$$

より, 求める答は

$$\begin{cases} 0 \dots\dots n = 4k+1, 4k+2 \text{ のとき} \\ 1 \dots\dots n = 4k+3 \text{ のとき} \\ 2 \dots\dots n = 4k+4 \text{ のとき} \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, \dots\dots)$$

$$(1) \quad |\overrightarrow{OP}|^2 - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\left|\overrightarrow{OP} - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)\right|^2 = \left|\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right|^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 4|\overrightarrow{OB}|^2}{16}$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{OP} - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)\right| = \frac{|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}|}{4}$$

よって、点 P の軌跡は円である。

(2) (1) より,

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

(3) $|\overrightarrow{OA}|^2 + 4|\overrightarrow{OB}|^2 = -5\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ より, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0$ である。

このとき,

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + 4|\overrightarrow{OB}|^2 - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{16} = \frac{-9\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{16}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OC}| = \frac{3}{4}\sqrt{-\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}$$

また,

$$(\text{円の半径})^2 = \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + 4|\overrightarrow{OB}|^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{16} = \frac{-\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{16}$$

$$\therefore (\text{円の半径}) = \frac{1}{4}\sqrt{-\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}$$

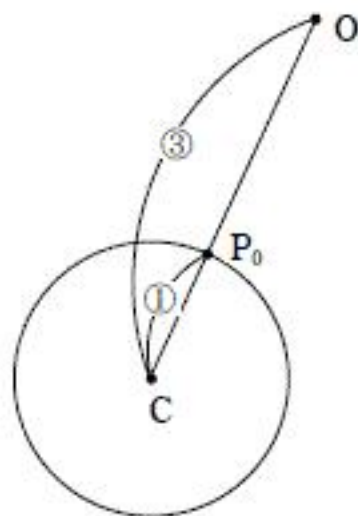
これより、点 O は円の外部にあり,

$$CP_0 : CO = 1 : 3$$

であることがわかる。したがって

$$\overrightarrow{OP_0} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は 1 次独立なので $s = \frac{1}{6}, t = -\frac{1}{3}$



$$f(x) = x^3 + x^2 + px + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + p$$

(1) 2 次方程式

$$3x^2 + 2x + p = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x + p - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が異なる 2 つの実数解をもてばよい. よって,

$$\frac{D}{4} = 1 - 3(p - 1) > 0$$

$$\therefore p < \frac{4}{3}$$

(2) α, β は $\textcircled{1}$ の解であるから,

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{p-1}{3} = \frac{16-12p}{9}$$

(3) 点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3\alpha^2 + 2\alpha + p)(x - \alpha) + \alpha^3 + \alpha^2 + p\alpha + 1 \\ &= (3\alpha^2 + 2\alpha + p)x - 2\alpha^3 - \alpha^2 + 1 \end{aligned}$$

よって, y 軸との交点を A とすると, $A(0, -2\alpha^3 - \alpha^2 + 1)$

同様に点 $(\beta, f(\beta))$ における接線と y 軸の交点を B とすると, $B(0, -2\beta^3 - \beta^2 + 1)$ したがって,

$$\begin{aligned} AB &= |2(\beta^3 - \alpha^3) + (\beta^2 - \alpha^2)| \\ &= |\beta - \alpha| |2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) + (\alpha + \beta)| \\ &= \sqrt{\frac{16-12p}{9}} \cdot \left[2 \left\{ \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{p-1}{3} \right\} + \frac{-2}{3} \right] \\ &= \frac{\sqrt{16-12p}}{3} \cdot \frac{8-6p}{9} = \frac{4}{27} (4-3p)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(4) 2 接線間の距離が $\frac{8}{27}$ であるためには

$$AB = \frac{8}{27} \sqrt{2}$$

であればよい. よって

$$\frac{4}{27} (4-3p)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27} \sqrt{2}$$

$$(4-3p)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$4-3p = 2$$

$$\therefore p = \frac{2}{3}$$

