

(1)  $\det A = t(2-t) - (t-1)(1-t) = 1 \neq 0$  より,  $A$  は逆行列  $A^{-1}$  をもつ.

(2)  $A = \begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix}$ ,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix}$  であるから,

$$A + A^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 2t-2 & 2t-2 \\ 2-2t & 2-2t \end{pmatrix} = (2t-2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - A^{-1})^2 = (2t-2)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)  $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  とおくと, (2) より  $N^2 = 0$

また,

$$\begin{cases} A + A^{-1} = 2E \\ A - A^{-1} = (2t-2)N \end{cases}$$

より,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \{ (A + A^{-1}) + (A - A^{-1}) \} \\ &= E + (t-1)N \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} A^n &= \{E + (t-1)N\}^n = E + n(t-1)N \\ A^{2n} &= \{E + (t-1)N\}^{2n} = E + 2n(t-1)N \end{aligned}$$

よって,

$$A^{2n} - tA^n = (1-t)E + (-t^2 + 3t - 2)nN$$

これが  $n$  によらない行列であるための条件は

$$-t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$\therefore t = 1, 2$$

1から $3n$ までのカードを

$$\begin{cases} A_0: 3 \text{ で割り切れるカード} \\ A_1: 3 \text{ で割ると, 余りが } 1 \text{ となるカード} \\ A_2: 3 \text{ で割ると, 余りが } 2 \text{ となるカード} \end{cases}$$

の3つに分類する( $A_0, A_1, A_2$  それぞれ  $n$  枚ずつある).

(1) 3枚とも  $A_0$  から取り出せばよいので,

$$\frac{{}_n C_3}{{}_{3n} C_3} = \frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \bullet 3 \text{ 枚とも } A_0 \text{ から選ぶ} \\ \bullet 3 \text{ 枚とも } A_1 \text{ から選ぶ} \\ \bullet 3 \text{ 枚とも } A_2 \text{ から選ぶ} \\ \bullet A_0, A_1, A_2 \text{ から } 1 \text{ 枚ずつ選ぶ} \end{cases}$$

の4つの場合がある. 求める確率を  $p$  とすると,

$$\begin{aligned} p &= \frac{{}_n C_3 + {}_n C_3 + {}_n C_3 + ({}_n C_1)^3}{{}_{3n} C_3} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) + 2n^3}{n(3n-1)(3n-2)} = \frac{3n^2 - 3n + 2}{(3n-1)(3n-2)} \end{aligned}$$

(3) 積が3の倍数である確率を  $q$  とおく. 3の倍数とならないのは, 3枚とも「 $A_0$  以外」から選ぶことであるから,

$$1-q = \frac{{}_{2n} C_3}{{}_{3n} C_3} = \frac{2(2n-1)(2n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} = \frac{8n^2 - 12n + 4}{3(3n-1)(3n-2)}$$

ここで,

$$\begin{aligned} q - (1-p) &= p - (1-q) \\ &= \frac{3(3n^2 - 3n + 2) - (8n^2 - 12n + 4)}{3(3n-1)(3n-2)} = \frac{(n+1)(n+2)}{3(3n-1)(3n-2)} > 0 \end{aligned}$$

よって

$q > 1-p$  となるので, 積が3の倍数となる確率の方が大きい.

(1)  $0 \leq x \leq 1$ において,  $x^2(1-x)^n \geq 0$ であるから,

$$\begin{aligned}
 S_n &= \int_0^1 x^2(1-x)^n dx \\
 &= \left[ x^2 \cdot \frac{-1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{n+1} x(1-x)^{n+1} dx \\
 &= \left[ \frac{2}{n+1} x \cdot \frac{-1}{n+2} (1-x)^{n+2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{(n+1)(n+2)} (1-x)^{n+2} dx \\
 &= \left[ \frac{-2}{(n+1)(n+2)(n+3)} (1-x)^{n+3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}
 \end{aligned}$$

(2)  $S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ と表せるから,

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sum_{k=1}^n S_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}
 \end{aligned}$$

よって,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{6}$

(1)  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$  より,  $l$  の方程式は

$$y = -2ae^{-a^2}(x-a) + e^{-a^2}$$

$$\therefore 2ae^{-a^2}x + y - (2a^2 + 1)e^{-a^2} = 0$$

これより,

OP = (点 O と直線  $l$  の距離)

$$= \frac{|-(2a^2 + 1)e^{-a^2}|}{\sqrt{(2ae^{-a^2})^2 + 1^2}} = \frac{(2a^2 + 1)e^{-a^2}}{\sqrt{4a^2e^{-2a^2} + 1}}$$

(2)  $OQ = (2a^2 + 1)e^{-a^2}$  であるから,

$$\cos \theta = \frac{OP}{OQ} = \frac{1}{\sqrt{4a^2e^{-2a^2} + 1}}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\frac{4a^2e^{-2a^2}}{4a^2e^{-2a^2} + 1}}$$

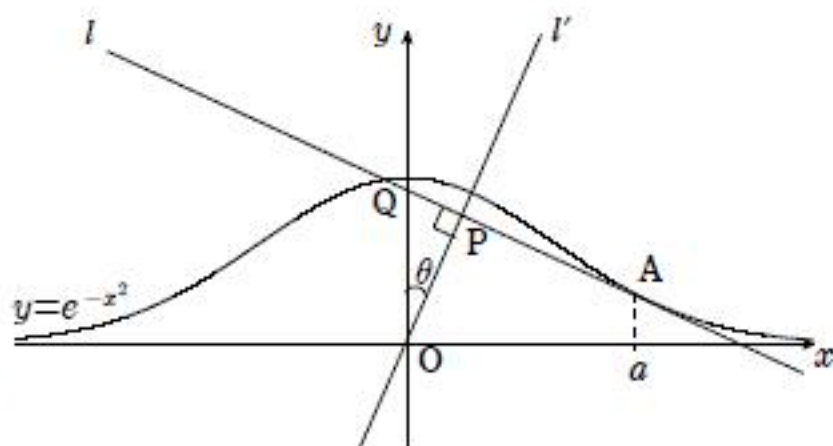
(3)  $\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2e^{-2a^2} + 1}}$  であるから,  $a^2e^{-2a^2}$  が最大するとき  $\sin \theta$  も最大である.

$t = a^2$  とし,  $f(t) = te^{-2t}$  とおく ( $t \geq 0$ ).

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^{-2t} - 2te^{-2t} \\ &= (1 - 2t)e^{-2t} \end{aligned}$$

右の増減表より,  $t = \frac{1}{2}$  で最大となるので

$\sin \theta$  は  $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  で最大値  $\sqrt{\frac{\frac{2}{e}}{\frac{2}{e} + 1}} = \sqrt{\frac{2}{e + 2}}$  をとる.



|         |   |     |                |     |
|---------|---|-----|----------------|-----|
| $t$     | 0 | ... | $\frac{1}{2}$  | ... |
| $f'(t)$ |   | +   | 0              | -   |
| $f(t)$  |   | ↗   | $\frac{1}{2e}$ | ↘   |