

平成23年度入学試験問題

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学A・数学B)

注 意

- 1 問題冊子は1冊，解答用紙は4枚，下書き用紙は3枚です。
- 2 すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
- 3 解答は，すべて解答用紙の指定されたところに書きなさい。
また，答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
ただし，裏面は採点の対象になりません。
- 4 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数 学 (数学 I・数学 II・数学 A・数学 B)

1

空間内に点 $O(0,0,0)$ と点 $A(2,2,2)$ がある。点 P は O から出発し、一回につき x 軸, y 軸, z 軸いずれか一つの方に長さ 1 だけ移動する。

- (1) P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ。
- (2) さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し, 4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し, 6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする。さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ。
- (3) (2) と同じルールで, さいころを 6 回投げて P が点 $B(1,1,1)$ を通って A に到達する確率を求めよ。

2

数列 $\{a_n\}$ が次のように帰納的に定められている。

$$a_1 = 0$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (n \text{ が奇数のとき}) \\ a_n + 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_{10} を求めよ。
- (2) n が奇数の場合と偶数の場合それぞれについて, a_{n+4} を a_n で表せ。
- (3) a_n を 3 で割ったときの余りを求めよ。

3

平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする。
この平面上の点 P が

$$2|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) P の軌跡が円となることを示せ。
- (2) (1) の円の中心を C とするとき、 $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ。
- (3) O との距離が最小となる (1) の円周上の点を P_0 とする。 A, B が条件

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + 5\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 4|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

を満たすとき、 $\overrightarrow{OP_0} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ となる s, t の値を求めよ。

4

p を定数とする。

$$f(x) = x^3 + x^2 + px + 1$$

とおく。 $y = f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという。
このとき、次の問いに答えよ。

- (1) p の範囲を求めよ。
- (2) 2 つの接点の x 座標を α, β とする。 $(\alpha - \beta)^2$ を p を用いて表せ。
- (3) 2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき、線分 AB の長さを p を用いて表せ。
- (4) 2 つの接線の間の距離が $\frac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。