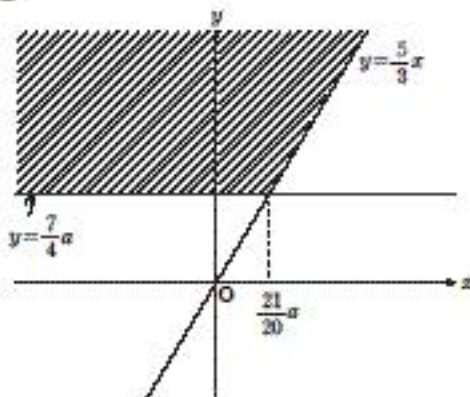


- (1) 右図のようになる。ただし、境界含む。



- (2) $x - y \geq 3 - a$ は、直線 $y = x - 3 + a$ の下側領域であり、

$1 < \frac{5}{3}$ であるから、条件は、

領域 $x - y \geq 3 - a$ が点 $\left(\frac{21}{20}a, \frac{7}{4}a\right)$ を含む

ことである。したがって、

$$\frac{21}{20}a - \frac{7}{4}a \geq 3 - a$$

$$\therefore a \geq 10$$

(1) $A_1, A_2, \dots, A_5$ から2つ選べばよいので,

$$a_5 = {}_5C_2 = 10$$

また, 二等辺三角形は,

$$\triangle A_0 A_2 A_4, \triangle A_0 A_1 A_5, \triangle A_0 A_1 A_2, \triangle A_0 A_4 A_5$$

の4つあるので,

$$b_5 = 4$$

(2) (1) と同様に,

$$a_k = {}_{k-1}C_2 = \frac{1}{2}(k-1)(k-2) = \frac{1}{6}\{k(k-1)(k-2) - (k-1)(k-2)(k-3)\}$$

$$\therefore S = \sum_{k=3}^m \frac{1}{6}\{k(k-1)(k-2) - (k-1)(k-2)(k-3)\} = \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$$

(計算部分の別解)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=3}^m \frac{1}{2}(k^2 - 3k + 2) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2}(k^2 - 3k + 2) \\ &= \frac{1}{12}m(m+1)(2m+1) - \frac{3}{4}m(m+1) + m \\ &= \frac{1}{12}m\{(m+1)(2m+1) - 9(m+1) + 12\} \\ &= \frac{1}{6}m(m-1)(m-2) \end{aligned}$$

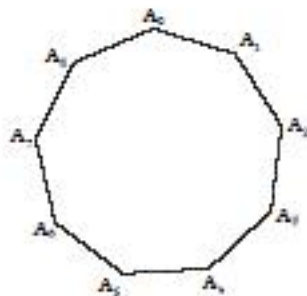
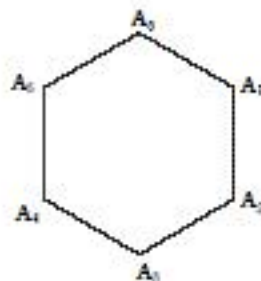
(3) 正三角形は $\triangle A_0 A_3 A_6$ の1通り.

正三角形でない二等辺三角形 $A_0 A_j A_k$ は

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot A_0 A_j = A_0 A_k \text{ となるものは } 3 \text{ 通り} \\ \cdot A_j A_0 = A_j A_k \text{ となるものは } 6 \text{ 通り} \\ (j=1, 2, 4, 5, 7, 8 \text{ に対して,} \\ k \text{ の選び方が各々 } 1 \text{ 通りずつ存在する}) \end{array} \right.$$

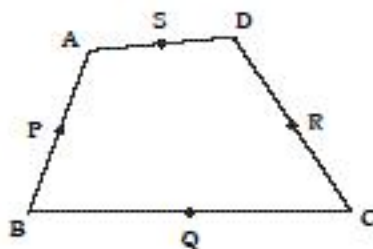
したがって,

$$b_9 = 1 + 3 + 6 = 10$$



(1)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} \\ \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \end{cases}$$



より,

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OR} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OQ} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OS} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

したがって, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OL}$ であるから, KとLは一致する.

(2)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \end{cases}$$

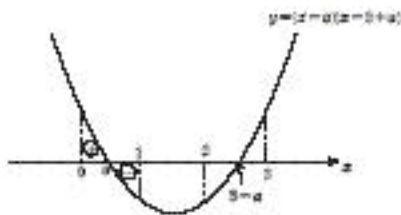
線分MNの中点をTとおくと,

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} \overrightarrow{ON} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OK}$$

よって, $K=T$ と分かるので, 点Kは直線MN上の点であることが示された.

$0 \leq a \leq 1, 2 \leq 3-a \leq 3$ より,

$y = (x-a)(x-3+a)$ のグラフは右図のようになる.



これより,

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^a (x-a)(x-3+a)dx + \int_a^1 -(x-a)(x-3+a)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - a(a-3)x \right]_0^a + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + a(a-3)x \right]_a^1 \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2 - a^2(a-3) \right\} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + a(a-3) \\ &= -\frac{4}{3}a^3 + 4a^2 - 3a + \frac{7}{6} \end{aligned}$$

微分すると,

$$\begin{aligned} f'(a) &= -4a^2 + 8a - 3 \\ &= -(2a-3)(2a-1) \end{aligned}$$

よって, $f(a)$ の増減表は下のようになる.

a	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$	$\frac{7}{6}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{6}$

したがって,

$$a = \frac{1}{2} \text{ のとき, 最小値 } \frac{1}{2}$$

$$a = 0 \text{ のとき, 最大値 } \frac{7}{6}$$

