

(1) (OPの傾き) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、求める接線の方程式は、

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + k \quad \cdots \cdots ①$$

とおける。 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に代入して、

$$\frac{x^2}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + k \right)^2 = 1$$

$$\therefore x^2 + \sqrt{3}kx + k^2 - 1 = 0 \quad \cdots \cdots ②$$

①が接線になるための条件は、

$$(\text{②の判別式}) = (\sqrt{3}k)^2 - 4(k^2 - 1) = 0$$

$$k^2 = 4$$

$$\therefore k = \pm 2$$

よって、求める答は、 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x \pm 2$

(2) OP = (一定) であるから、これを $\triangle OPQ$ の底辺とみなすと、高さ、すなわち点 Q から直線 OP に下ろした垂線の長さを最大にすればよい。それは Q が直線 OP に平行な C の接線の接点のときである。

②が重解をもつとき、

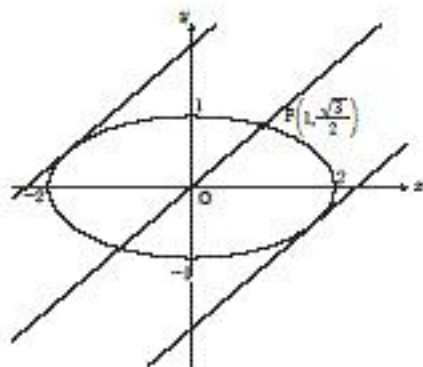
$$(\text{②の重解}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}k = \mp\sqrt{3}$$

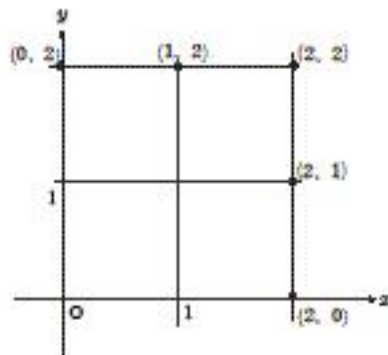
より、Qの座標は、

$$\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2} \right), \left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2} \right)$$

また、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値は、

$$\frac{1}{2} \left| 1 \cdot \frac{1}{2} - (-\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$$





- (1) 4回中、表が2回、裏が2回出ればよいので、

$$P_4 = {}_4C_2 p^2 q^2 = 6p^2 q^2$$

- (2)

$$\begin{cases} \cdot 4回投げて(1, 2)に到達し、5回目に表が出る (A) \\ \cdot 4回投げて(2, 1)に到達し、5回目に裏が出る (B) \end{cases}$$

の2つの場合がある。

Aは、はじめの4回は表が1回、裏が3回出て、5回目に表が出る場合なので、その確率は、

$${}_4C_1 p q^3 \times p = 4p^2 q^3$$

Bは、はじめの4回は表が3回、裏が1回出て、5回目は裏が出る場合なので、その確率は、

$${}_4C_1 p^3 q \times q = 4p^3 q^2$$

よって、

$$\begin{aligned} P_5 &= 4p^2 q^3 + 4p^3 q^2 \\ &= 4p^2 q^2 (p + q) \\ &= 4p^2 q^2 \end{aligned}$$

- (3) $P_5 = \frac{1}{9}$ より、

$$\begin{aligned} 4p^2 q^2 &= \frac{1}{9} \\ (pq)^2 &= \frac{1}{36} \\ \therefore pq &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$q = 1 - p$ なので、

$$p(1 - p) = \frac{1}{6}$$

$$p^2 - p + \frac{1}{6} = 0$$

$$\therefore p = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \quad (0 < p < 1 \text{ を満たす})$$

(1)

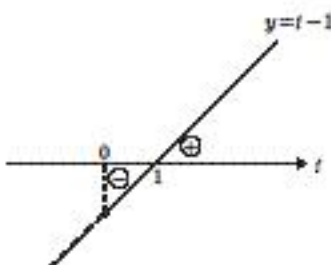
$$f'(t) = \frac{e^t t - 1 \cdot e^t}{t^2} = \frac{(t-1)e^t}{t^2}$$

$e^t > 0, t^2 > 0$ より, $f'(t)$ の符号は $t-1$ の符号と一致する.

増減表は下のようになる.

t	(0)	...	1	...	(∞)
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	(∞)	$\searrow$	e	$\nearrow$	(∞)

これより, 最小値は e ($t=1$ のとき)



(2) y を消去すると,

$$e^{x^2} = ax^2$$

$x=0$ は明らかに解ではないことに注意して, $t=x^2$ とおくと, $t>0$ であり, 与えられた方程式は,

$$e^t = at$$

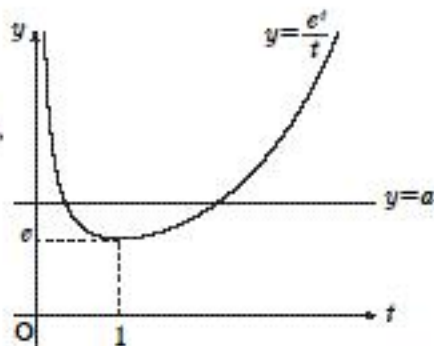
$$\frac{e^t}{t} = a$$

ここで, (1) より, $y = \frac{e^t}{t}$ のグラフは右のようになり,

各 $t=t_0$ (>0) に対し, 対応する x は $\sqrt{t_0}, -\sqrt{t_0}$

の2つあることに注意すると, 求める答は,

$$\begin{cases} 0 < a < e \text{ のとき,} & 0 \text{ 個} \\ a = e \text{ のとき,} & 2 \text{ 個} \\ a > e \text{ のとき,} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$



(3) $a=e$ のとき, 右図のようになる. C_1, C_2 をそれぞれ

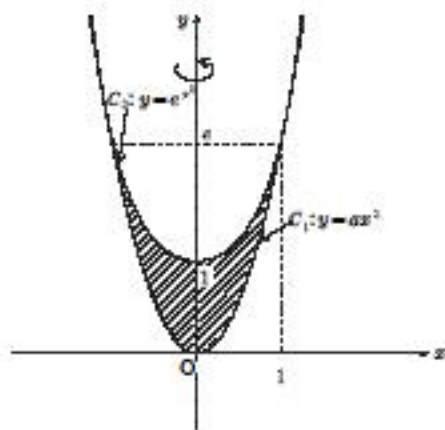
x^2 について解くと,

$$C_1: x^2 = \frac{1}{e} y$$

$$C_2: x^2 = \log y$$

となるので, 求める体積は,

$$\begin{aligned} & \int_0^e \pi \frac{1}{e} y dy - \int_1^e \pi \log y dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{2e} y^2 \right]_0^e - \pi [y \log y - y]_1^e \\ &= \left(\frac{e}{2} - 1 \right) \pi \end{aligned}$$



$$(1) \quad f_2(x) = f(f(x)) = 0$$

より, $t = f(x)$ とおくと,

$$f(t) = 0$$

$$\therefore 4t(1-t) = 0$$

$$\therefore t = 0, 1$$

$t = 0$ のとき, $4x(1-x) = 0$ より, $x = 0, 1$

$t = 1$ のとき, $4x(1-x) = 1$ より, $4x^2 - 4x + 1 = 0$ だから $x = \frac{1}{2}$

よって, $x = 0, \frac{1}{2}, 1$

(2) $\alpha(c), \beta(c)$ は,

$$f(\alpha(c)) = c, f(\beta(c)) = c$$

を満たす. よって,

$$\begin{cases} f_{n+1}(\alpha(c)) = f_n(f(\alpha(c))) = f_n(c) = 0 \\ f_{n+1}(\beta(c)) = f_n(f(\beta(c))) = f_n(c) = 0 \end{cases}$$

したがって, $\alpha(c), \beta(c)$ は $f_{n+1}(x) = 0$ の解である.

(3) まず, すべての n に対し, $x = 1$ が $f_n(x) = 0$ の解であることを数学的帰納法で示す.

(I) $n = 1$ のとき

このとき, $x = 1$ は明らかに $f_1(x) = 4x(1-x) = 0$ の解である.

(II) $n = k$ のとき正しい, つまり, $f_k(1) = 0$ と仮定する. このとき,

$$f_{k+1}(1) = f_k(f(1)) = f_k(0) = 0$$

$\therefore x = 1$ は $f_{k+1}(x) = 0$ の解であるから, $n = k+1$ のときも正しい.

以上, (I), (II) より, $x = 1$ が $f_n(x) = 0$ の解であることが示された.

(注: $f_n(x) = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f(x)$ であるから, $f_k(f(x)) = f(f_k(x))$ が成立する)

さて, 方程式 $f_n(x) = 0$ の $0 \leq x \leq 1$ における解を

$$x = a_1, a_2, \dots, a_l \quad \dots\dots (*)$$

とおく. (ただし, $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_l = 1, l = S_n$)

$f(x) = t$ とおき, 方程式 $f_{n+1}(x) = 0$ の $0 \leq x \leq 1$ における解について考える. ここで,

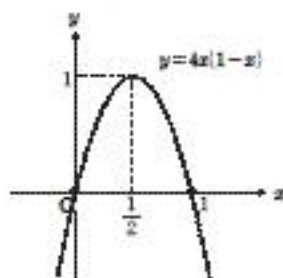
$$0 \leq x \leq 1 \iff 0 \leq f(x) \leq 1 \quad (\text{つまり, } 0 \leq t \leq 1)$$

である (右のグラフ). 方程式を変形すると,

$$f_{n+1}(x) = 0$$

$$f_n(f(x)) = 0$$

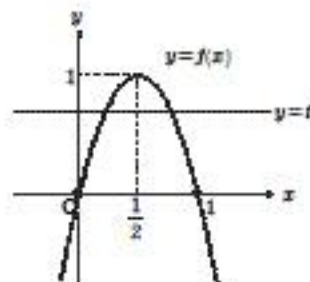
$$f_n(t) = 0 \quad (\text{上より, } 0 \leq t \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 1 \text{ に注意})$$



この方程式の $0 \leq t \leq 1$ における解は (*) より, $t = a_1, a_2, \dots, a_l$

ここで, x の方程式 $f(x) = t$ の解の個数は,

$$\begin{cases} 0 \leq t < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ t = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{cases}$$



よって,

$$\begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, l-1 \text{ のとき } f(x) = a_i \text{ を満たす } x \text{ は } 2 \text{ 個存在} \\ i = l \text{ のとき } f(x) = a_l = 1 \text{ を満たす } x \text{ は } 1 \text{ 個だけ } \left(x = \frac{1}{2}\right) \text{ 存在} \end{cases}$$

するので, $f_{n+1}(x) = 0$ の解は, $2(l-1) + 1 = 2l - 1$ 個あり, これらは互いに相異なる.

$$\therefore S_{n+1} = 2S_n - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$S_1 = 2$ であるから, ①を解くと,

$$S_{n+1} - 1 = 2(S_n - 1)$$

$$S_n - 1 = (S_1 - 1) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore S_n = 2^{n-1} + 1$$

(注意) $f_n(0) = f \circ f \circ \cdots \circ f(0) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \bullet f_n(1) &= f_{n-1}(f(1)) \\ &= f_{n-1}(0) = 0 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\bullet f_1(1) = 0$$

より, $f_n(1) = 0$ ($n \geq 1$) を示してもよい.