

平成24年度入学試験問題

数 学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B・数学C)

注 意

- 1 問題冊子は1冊，解答用紙は4枚，下書き用紙は3枚です。
- 2 すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
- 3 解答は，すべて解答用紙の指定されたところに書きなさい。
また，答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
ただし，裏面は採点の対象になりません。
- 4 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数 学 (数学 I ・ 数学 II ・ 数学 III ・ 数学 A ・ 数学 B ・ 数学 C)

1

O を原点とする座標平面における曲線 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上に, 点 $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。

- (1) C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。
- (2) 点 Q が C 上を動くとき, $\triangle OPQ$ の面積の最大値と, 最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。

2

表の出る確率が p , 裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p, q は正の定数で, $p + q = 1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

とし, D 上を動く点 Q を考える。Q は点 $(0, 0)$ から出発し, 硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み, 裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお, この規則で D 上を進めないときには, その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2, 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。
- (2) 硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2, 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。
- (3) $P_5 = \frac{1}{9}$ のとき, p の値を求めよ。

3

a を正の定数とし、座標平面上の 2 曲線 $C_1: y = e^{x^2}$, $C_2: y = ax^2$ を考える。このとき以下の問いに答えよ。ただし必要ならば $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ であることを用いてもよい。

- (1) $t > 0$ の範囲で、関数 $f(t) = \frac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ。
- (2) 2 曲線 C_1, C_2 の共有点の個数を求めよ。
- (3) C_1, C_2 の共有点の個数が 2 のとき、これらの 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4

$f(x) = 4x(1-x)$ とする。このとき

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x), \\ f_{n+1}(x) = f_n(f(x)) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f_2(x) = 0$ を解け。
- (2) $0 \leq t < 1$ を満たす定数 t に対し、方程式 $f(x) = t$ の解を $\alpha(t), \beta(t)$ とする。
 c が $0 \leq c < 1$ かつ $f_n(c) = 0$ を満たすとき、 $\alpha(c), \beta(c)$ は $f_{n+1}(x) = 0$ の解であることを示せ。
- (3) $0 \leq x \leq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x) = 0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し、一般項 S_n を求めよ。