

[1]

$$(1) \quad a_1 = 1 > 0$$

ある k について、 $a_k > 0$ と仮定すると、与漸化式より、

$$a_{k+1} - a_k = a_k(5 - a_{k+1})$$

$$(a_k + 1)a_{k+1} = 6a_k$$

$$a_k + 1 \neq 0 \text{ より、 } a_{k+1} = \frac{6a_k}{a_k + 1} \quad \therefore a_{k+1} > 0$$

よって、数学的帰納法により、すべての n について $a_n > 0$ である。 (証明終)

$$(2) \quad ((1) \text{ より } a_n \neq 0 \text{ なので、 } \frac{1}{a_n} \text{ が定義できて、 } b_n = \frac{1}{a_n} \text{ とおく})$$

$$(1) \text{ の経過より、 } a_{n+1} = \frac{6a_n}{a_n + 1}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 1}{6a_n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a_n}$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad \textcircled{1} \text{ を変形して、 } b_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \left(b_n - \frac{1}{5} \right)$$

よって、 $\left\{ b_n - \frac{1}{5} \right\}$ は公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列で、初項は $b_1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ なので、

$$b_n - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{6} \right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{5} \left\{ 1 + 4 \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} \right\} = \frac{1}{5} \cdot \frac{6^{n-1} + 4}{6^{n-1}}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{5 \cdot 6^{n-1}}{6^{n-1} + 4} \quad (\text{答})$$

[2]

$$(1) \quad \underline{\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}} \quad (\text{答})$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \underline{\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OR} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OQ} = \underline{\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)} \quad (\text{答})$$

$$\frac{m}{m+n} = t \text{ とおく。}(0 < t < 1)$$

$\overrightarrow{AS} = k\overrightarrow{AR}$ (k : 実数) と表せるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OA} &= k(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA}) \\ &= k\left\{\left(\frac{t}{4} - 1\right)\vec{a} + \frac{t}{4}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}\right\} \\ \therefore \overrightarrow{OS} &= \left\{1 + k\left(\frac{t}{4} - 1\right)\right\}\vec{a} + \frac{tk}{4}\vec{b} + \frac{tk}{2}\vec{c} \quad \dots\dots\dots ① \end{aligned}$$

S は平面 OBC 上の点で、

$$\overrightarrow{OS} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} \quad (\alpha, \beta: \text{実数})$$

と表せるので、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が 1 次独立であることより、

$$\text{①の } \vec{a} \text{ の係数 } 1 + k\left(\frac{t}{4} - 1\right) = 0$$

$$\therefore k = \frac{4}{4-t} = \frac{4}{4 - \frac{m}{m+n}} = \frac{4(m+n)}{3m+4n}$$

よって①より、

$$\overrightarrow{OS} = \underline{\frac{m}{3m+4n}\vec{b} + \frac{2m}{3m+4n}\vec{c}} \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad \frac{AR}{RS} = \frac{1}{k-1} = \underline{\frac{3m+4n}{m}} \quad (\text{答})$$

$$[3] \quad f(x) = 2x - [x] - (x - [x])^2$$

$$(1) \quad f(x) - x = x - [x] - (x - [x])^2$$

ここで、 $x - [x] = t$ とおくと、定義より $x - 1 < [x] \leq x$ なので $0 \leq t < 1$ であり、

$$f(x) - x = t - t^2 = t(1 - t)$$



であるから、 $f(x) - x \geq 0 \quad \therefore f(x) \geq x$ (証明終)

$$(2) \quad f(x+1) = 2(x+1) - [x+1] - \{(x+1) - [x+1]\}^2$$

ここで、 $[x+1] = [x] + 1$ であることを用いると、

$$f(x+1) = 2x - [x] + 1 - (x - [x])^2 = f(x) + 1 \quad (\text{証明終})$$

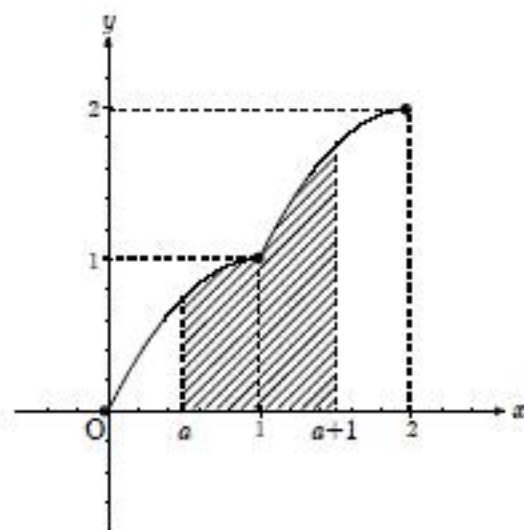
(3) $0 \leq x < 1$ のとき $[x] = 0$ であるから、

$$f(x) = 2x - x^2$$

これと(2)の結果も用いて、 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 2$) のグラフは右のようになる。

ただし、グラフの $1 \leq x \leq 2$ の部分は、

$0 \leq x \leq 1$ の部分のグラフを x 軸方向に 1、 y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。



(4) $\int_a^{a+1} f(x) dx$ は図の斜線部の面積を表し、斜線部の $1 \leq x \leq a+1$ かつ $y \geq 1$ の部分が

$y = f(x)$ と x 軸と $x = a$ に囲まれた図形と合同であることを用いると、

$$\int_a^{a+1} f(x) dx = \int_0^1 (2x - x^2) dx + a \times 1$$

$$= \left[x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + a = a + \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$

[4]

- (1) 3 試合目に A が優勝するのは、

A が 3 連勝するときで、確率は p^3

B についても同様なので、求める確率は $\underline{p^3 + q^3}$ (答)

- (2) 5 試合目に A が優勝するのは、4 試合目まで A が勝つのが 2 回、B が勝つまたは引き分けとなるのが 2 回で、5 試合目に A が勝つときで、その確率は、

$${}_4C_2 p^2 (1-p)^2 \times p = 6p^3 (1-p)^2$$

B についても同様なので、求める確率は、

$$\underline{6p^3 (1-p)^2 + 6q^3 (1-q)^2} \quad (\text{答})$$

- (3) (2) と同様にして、4 試合目に優勝が決まる確率は、

$$\begin{aligned} & {}_3C_2 p^2 (1-p) \times p + {}_3C_2 q^2 (1-q) \times q \\ & = 3p^3 (1-p) + 3q^3 (1-q) \end{aligned}$$

n 回目に優勝が決まる確率を a_n とおく。

以下、 $p = q = \frac{1}{3}$ の下で、

$$a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}$$

$$a_4 = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

$$a_5 = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 6 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

求める確率は、

$$1 - (a_3 + a_4 + a_5) = \underline{\frac{47}{81}} \quad (\text{答})$$

- (4) $p = q = \frac{1}{2}$ の下で、引き分けが起こりえないことを注意して、優勝が決まるまでの試合数は 3 または 4 または 5 である。

$$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$a_5 = 1 - (a_3 + a_4) = \frac{3}{8}$$

求める期待値は、

$$3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = \underline{\frac{33}{8}} \quad (\text{答})$$

試合数	3	4	5
確率	a_3	a_4	a_5