

$$(1) \quad 1 \leq a < b < c \leq n$$
$${}_nC_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \text{通り} \quad (\text{答})$$

(2) $1 \leq a \leq b \leq c \leq n$

$$\begin{cases} \textcircled{1} 1 \leq a = b = c \leq n \\ \textcircled{2} 1 \leq a = b < c \leq n \\ \textcircled{3} 1 \leq a < b = c \leq n \end{cases}$$

よつて、求めるものは、

$$\begin{aligned} & {}_nC_3 + n + {}_nC_2 \times 2 \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + n + \frac{1}{2}n(n-1) \times 2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \text{ 通り} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(別) $a=x, b+1=y, c+2=z$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 &1 \leq a \leq b \leq c \leq n \\
 \Leftrightarrow &1 \leq x \leq y-1 \leq z-2 \leq n \\
 \Leftrightarrow &1 \leq x < y < z \leq n+2 \quad \dots(*) \\
 (\because) &x \leq y-1 \Leftrightarrow x+1 \leq y \Leftrightarrow x < y \\
 &\quad\quad\quad \text{\scriptsize x, y は整数だから} \\
 &y-1 \leq z-2 \Leftrightarrow y+1 \leq z \Leftrightarrow y < z \\
 &\quad\quad\quad \text{\scriptsize y, z は整数だから}
 \end{aligned}$$

$${}_{n+2}C_3 = \frac{1}{6}(n+2)(n+1)n \text{ 通り} \quad (\text{答})$$

(3) a は $1, 2, \dots, n-1$ のいずれかで、 a を決めたとき、

$$\begin{cases} a < b \leq n \text{ を満たす } b \text{ は } n-a \text{ 通り} \\ a \leq c \leq n \text{ を満たす } c \text{ は } n-a+1 \text{ 通り} \end{cases}$$

よって、組 (b, c) は $(n-a)(n-a+1)$ 通り

よって、求めるものは、

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1}^{n-1} (n-a)(n-a+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \quad (k=n-a \text{ とおく}) \\ &= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \text{ 通り} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[2]

- (1) まず
- x
- を固定し、
- y
- を動かすことを考える。

与不等式より、

$$y^2 + 2axy + x^2 + 2bx + 1 \geq 0$$

$$(y + ax)^2 + (1 - a^2)x^2 + 2bx + 1 \geq 0$$

これがすべての実数 y について成り立つ条件は、(左辺を y の 2 次関数とみてそのグラフを考えることにより)

$$(1 - a^2)x^2 + 2bx + 1 \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

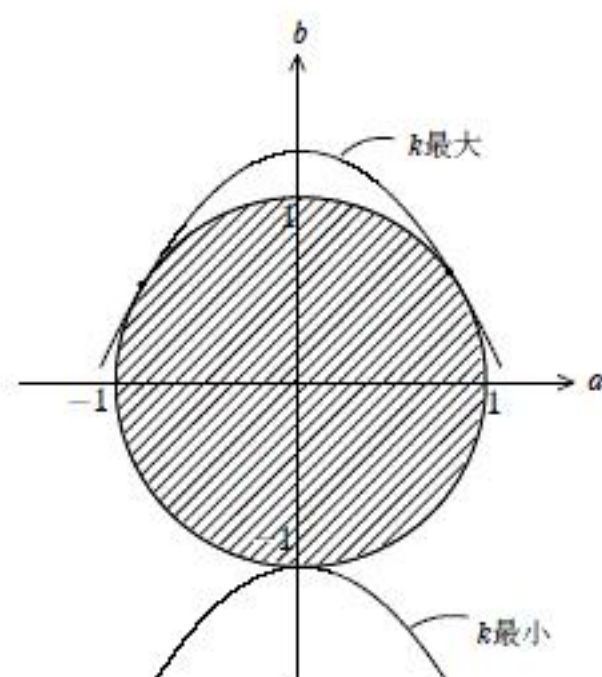
次に x を動かして、 $\textcircled{1}$ がすべての実数 x について成り立つ条件を求める。(i) $1 - a^2 < 0$ のとき、 $\textcircled{1}$ の左辺は傾き $2b$ の直線を表すので、 $2b = 0$ より $b = 0$ (ii) $1 - a^2 > 0$ のとき、 $\textcircled{1}$ の左辺は下に凸の放物線を表すので、(判別式を考えて)

$$b^2 - (1 - a^2) \leq 0 \quad \therefore a^2 + b^2 \leq 1$$

以上より求める条件は、

$$\underline{(a = \pm 1 \text{ かつ } b = 0) \text{ または } (-1 < a < 1 \text{ かつ } a^2 + b^2 \leq 1)} \quad (\text{答})$$

図示すると、次のようになる。(単位円の周と内部)



- (2)
- $a^2 + b = k$
- とおく。

放物線 $b = -a^2 + k$ と (1) で求めた領域が共有点をもつような k の値の範囲を考える。放物線が点 $(0, -1)$ を通るときに k は最小で -1 (答)

放物線と円が図のように第1, 2象限で接するときを考える。

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + b = k \end{cases} \text{ から } a \text{ を消去して、} b^2 - b - 1 + k = 0$$

$$\text{これが重解をもつので、} 1 - 4(-1 + k) = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{4}$$

$$\text{このとき、} b = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって、放物線と円は 2 点 $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で接する。

$$\text{このときに } k \text{ は最大で } \frac{5}{4} \quad (\text{答})$$

[3]

$$(1) \quad \overline{OQ} = A\overline{OP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 + \cos \theta \\ 4 + 2\cos \theta + 3\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{Q(2 + \cos \theta, 4 + 2\cos \theta + 3\sin \theta)} \quad (\text{答})$$

(2) $Q(X, Y)$ とすると、

$$X = 2 + \cos \theta$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より、 X のとり得る値の範囲は、

$$1 \leq X \leq 3$$

また、 $Y = 4 + 2\cos \theta + 3\sin \theta$

$$= \sqrt{13} \sin(\theta + \alpha) + 4$$

$$(\alpha \text{ は } \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{ を満たす定角})$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $\alpha \leq \theta + \alpha < 2\pi + \alpha$ であるから、 Y のとり得る値の範囲は、

$$-\sqrt{13} + 4 \leq Y \leq \sqrt{13} + 4$$

よって、

$$\underline{a_1 = 1, a_2 = 3, b_1 = -\sqrt{13} + 4, b_2 = \sqrt{13} + 4} \quad (\text{答})$$

(注) きちんと説明をかくと、 $Q \in T$ となる条件は、

$$\{x \mid 1 \leq x \leq 3\} \subset \{x \mid a_1 \leq x \leq a_2\} \text{ かつ } \{y \mid -\sqrt{13} + 4 \leq y \leq \sqrt{13} + 4\} \subset \{y \mid b_1 \leq y \leq b_2\}$$

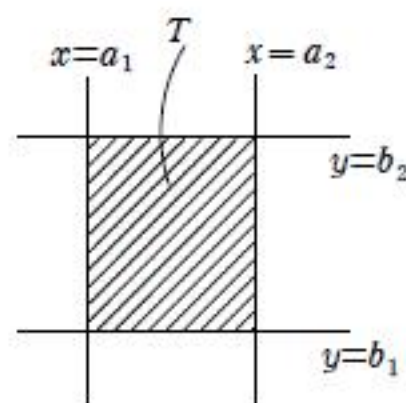
すなわち、 $a_1 \leq 1$ かつ $3 \leq a_2$ かつ $b_1 \leq -\sqrt{13} + 4$ かつ $\sqrt{13} + 4 \leq b_2$

となることで、この下で、

$$T \text{ の面積 } (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

が最小となるものは

$$\underline{a_1 = 1, a_2 = 3, b_1 = -\sqrt{13} + 4, b_2 = \sqrt{13} + 4} \quad (\text{答})$$



(3) H は中心 $(2, 4)$ 、半径 r の円の周と内部。 $K(2, 4)$ として、 KQ のとり得る値の範囲を考える。

$$\begin{aligned} KQ^2 &= \cos^2 \theta + (2\cos \theta + 3\sin \theta)^2 \\ &= 5\cos^2 \theta + 12\cos \theta \sin \theta + 9\sin^2 \theta \\ &= 5 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 6\sin 2\theta + 9 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= 6\sin 2\theta - 2\cos 2\theta + 7 \\ &= 2\sqrt{10} \sin(2\theta + \beta) + 7 \end{aligned}$$

$$(\beta \text{ は } \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin \beta = \frac{-1}{\sqrt{10}} \text{ を満たす定角})$$

よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき $\beta \leq 2\theta + \beta < 4\pi + \beta$ であることに注意して、

$$\max KQ^2 = 2\sqrt{10} + 7 = (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$$

$$\therefore \max KQ = \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

よって、すべての θ について $Q \in H$ となる条件は、

$$r \geq \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$\therefore \underline{\min r = \sqrt{2} + \sqrt{5}} \quad (\text{答})$$

[4]

(1) $0 < x < 1$ のとき、メネラウスの定理より、

$$\frac{AR}{RB} \times \frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} = 1$$

$$\therefore \frac{AR}{RB} = \frac{PC}{BP} \times \frac{QA}{CQ} = \frac{x}{2+x} \times \frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{(2+x)(1-x)}$$

$$\therefore AR = 2 \times \frac{AR}{AB} = 2 \times \frac{x^2}{-x+2} = \frac{2x^2}{-x+2} \quad (\text{答})$$

この結果は $x=0, 1$ でも成り立つ。

$$(2) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x^2}{-x+2} dx \quad \dots\dots ①$$

 $-x+2=t$ とおくと、 $x=2-t$ より、

$$x^2 = (2-t)^2 = t^2 - 4t + 4$$

$$\frac{dx}{dt} = -1 \quad \therefore dx = (-1)dt$$

$$\text{よって、} ① = 2 \int_2^1 \frac{t^2 - 4t + 4}{t} (-1) dt$$

$$= -2 \int_2^1 \left(t - 4 + \frac{4}{t} \right) dt = 2 \int_1^2 \left(t - 4 + \frac{4}{t} \right) dt$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} t^2 - 4t + 4 \log t \right]_1^2 = \underline{8 \log 2 - 5} \quad (\text{答})$$