[1]

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \underline{\frac{1}{2}n(n+1)\text{ 枚}}$ ……（答）

(2) 全事象は

$$ {}_{\frac{1}{2}n(n+1)}\mathrm{C}_2 = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\}}{2} $$
$$ = \frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)\text{ 通り} \quad \cdots\cdots ① $$

この中で2枚のカードが両方とも k であるものは

$$ {}_k\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}k(k-1)\text{ 通り} \quad \cdots\cdots ② \quad (k=1\text{ でも成立}) $$

その確率を q_k とすると

$$ q_k = \frac{②}{①} = \underline{\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}} \quad (1 \leqq k \leqq n) \quad \cdots\cdots(\text{答}) $$

(3) 求める確率は

$$ \sum_{k=1}^{n} q_k = \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \quad \cdots\cdots ③ $$

ここで

$$ \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\} $$
$$ = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) $$

ゆえに，　$③ = \underline{\dfrac{4}{3(n+2)}}$ ……（答）

(4) $p_n = 1 - ③ = 1 - \dfrac{4}{3(n+2)}$

ゆえに，　$p_n \geqq 0.9$ は

$$ \frac{4}{3(n+2)} \leqq 0.1 $$
$$ \frac{40}{3} \leqq n+2 $$
$$ n \geqq \frac{34}{3} $$

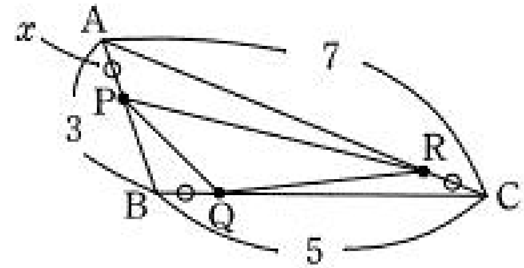
と同値.　　答は $\underline{n=12}$ ……（答）

[2]

(1) $\angle ABC=\theta$ とおく．余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに， $\theta=\underline{120^\circ}$ ……（答）



(2) $$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle BPQ=\frac{3-x}{3}\cdot\frac{x}{5}\cdot\triangle ABC=\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}x(3-x)}$$ ……（答）

(3) $\triangle ABC=S$ とおくと

$$\triangle BPQ=\frac{1}{15}(3x-x^2)S$$

$$\triangle CRQ=\frac{5-x}{5}\cdot\frac{x}{7}\cdot S=\frac{1}{35}(5x-x^2)S$$

$$\triangle APR=\frac{7-x}{7}\cdot\frac{x}{3}\cdot S=\frac{1}{21}(7x-x^2)S$$

ゆえに

$$\frac{\triangle PQR}{S}=1-\frac{1}{15}(3x-x^2)-\frac{1}{35}(5x-x^2)-\frac{1}{21}(7x-x^2)$$
$$=\frac{1}{105}(15x^2-71x)+1$$

$$15x^2-71x=15\left(x-\frac{71}{30}\right)^2-15\cdot\left(\frac{71}{30}\right)^2$$

これらと $0<x<3$ より

$\triangle PQR$ が最小 $\Longleftrightarrow$ $\underline{x=\frac{71}{30}}$ ……（答）

[3]

(1)　与漸化式より

$$a_{n+2}-a_{n+1}-3(a_{n+1}-a_n)=1$$

ゆえに，　$\underline{b_{n+1}-3b_n=1}$　(……①)　……（答）

(2)　①を変形すると　$b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$　となるから

$\left\{b_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は公比 3 の等比数列である．ゆえに，

$$b_n+\frac{1}{2}=\left(b_1+\frac{1}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$$

$a_1=1, a_2=2$　より，　$b_1=a_2-a_1=1$ だから

$$b_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$$

ゆえに，　$\underline{b_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)}$　……（答）

(3)　$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad \text{より}$$

$$a_n-a_1=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(3^k-1)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 3^n-\frac{1}{4}-\frac{n}{2}$$

したがって，　$\underline{a_n=\dfrac{1}{4}\cdot 3^n+\dfrac{3}{4}-\dfrac{n}{2}}$　($n=1$ でも成立)　……（答）

[4]

(1) 与条件より

$$f(x)=bx(x-a)\ (b<0)$$
$$=bx^2-abx$$

とかける.

$g(x)=x^2$ とおく. $f(x)=g(x)$ かつ $x\neq0$ とすると

$x^2=bx^2-abx$ すなわち, $(b-1)x=ab$

$b-1\neq0$ より $x=\dfrac{ab}{b-1}$

これが点 P の x 座標であり, t とおく.

$$m=g'(t)=2t$$
$$n=f'(t)=2bt-ab$$

である. $(2a-1)m=2an$ に代入すると

$$(2a-1)\cdot2t=2a\cdot b(\underline{2t-a})$$

$$\frac{2ab}{b-1}-a=a\left(\frac{2b}{b-1}-1\right)=a\cdot\frac{b+1}{b-1}$$

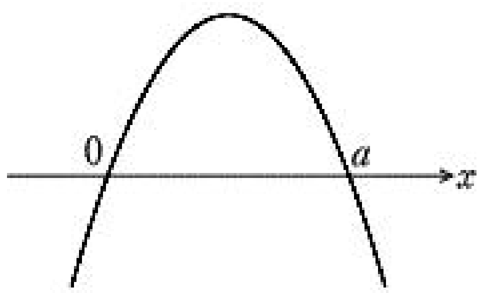
$$(2a-1)\cdot\frac{2ab}{b-1}=2ab\cdot a\cdot\frac{b+1}{b-1}$$

$\dfrac{2ab}{b-1}\neq0$ より $2a-1=a(b+1)$ 　　すなわち, $b=1-\dfrac{1}{a}$

$\left(0<a<1\text{より}, b<0\text{を満たす}\right)$

答は $\underline{f(x)=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)x(x-a)}$ 　　……(答)

(2) $y=f(x)$ のグラフは図のようになるから



$$S(a)=\int_0^a f(x)dx=\left(1-\frac{1}{a}\right)\int_0^a x(x-a)dx$$
$$=\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)a^3=\underline{\frac{1}{6}(-a^3+a^2)}$$ 　　…… (答)

(3)

$$S'(a)=\frac{1}{6}(-3a^2+2a)$$
$$=-\frac{1}{2}a\left(a-\frac{2}{3}\right)$$

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗		↘	

ゆえに, $\max S(a)=S\left(\dfrac{2}{3}\right)=\underline{\dfrac{2}{81}}$ 　　…… (答)