[1]

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \underline{\frac{1}{2}n(n+1)\text{ 枚}}$ …… (答)

(2) 全事象は

$$ {}_{\frac{1}{2}n(n+1)}C_2 = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\}}{2} $$
$$ = \frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)\text{ 通り} \quad \cdots\cdots ① $$

この中で2枚のカードが両方とも k であるものは

$$ {}_kC_2 = \frac{1}{2}k(k-1)\text{ 通り} \quad \cdots\cdots ② \quad (k=1\text{ でも成立}) $$

その確率を p_k とすると

$$ p_k = \frac{②}{①} = \underline{\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}} \quad (1 \leqq k \leqq n) \quad \cdots\cdots(答) $$

(3) 求める確率は

$$ \sum_{k=1}^{n} p_k = \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \quad \cdots\cdots ③ $$

ここで

$$ \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\} $$
$$ = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) $$

ゆえに, $③ = \underline{\frac{4}{3(n+2)}}$ …… (答)

(4) ①の中で2枚のカードが k と $k+1$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ であるものは,

$$ k(k+1)\text{ 通り} \quad \cdots\cdots ④ $$

その確率を q_k とすると

$$ q_k = \frac{④}{①} = \frac{8k(k+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \quad (1 \leqq k \leqq n-1) $$

求める確率は,

$$ \sum_{k=1}^{n-1} q_k = \frac{8}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \quad \cdots\cdots ⑤ $$

ここで

$$ \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \underline{\sum_{k=1}^{n} k(k-1)} = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) $$

└ (3)で求めたものと同じ

ゆえに, $⑤ = \underline{\frac{8}{3(n+2)}}$ ……(答)

[2]

(1) $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}2x\\2y-1\\2z-1\end{pmatrix}$

だから，　$\overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}\right)=0$　より

$$2x^2-2x+2y^2-y+2z^2-z=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8}$$

ゆえに S は中心 $Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, 半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{4}$ の球である．　　（終）

(2) 求める点を R とする．

球 S は点 O を通るから

$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OQ}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　ゆえに，　$R\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　……（答）

(3) $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ とかけるから

Q は平面 ABC（すなわち平面 α）上にある．　　（終）

(4) 平面 ABC の法線ベクトルを $\vec{n}=(x,y,z)$ とおく．

$$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0),\ \overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ より, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+y=0$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ より, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x+z=0$

たとえば，　$x=1$ とすると　$y=z=1$　より

$\vec{n}=(1,1,1)$ であり，　$\vec{n}\perp$ 平面ABC

求める点を K とすると，$\overrightarrow{QK}\perp$ 平面ABC より

$$\overrightarrow{QK}\,/\!/\,\vec{n}\quad\cdots\cdots①$$

(3)で示したことも考えて　$\left|\overrightarrow{QK}\right|=r=\frac{\sqrt{6}}{4}$　……②，$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{3}$　……③

①，②，③より

$$\overrightarrow{QK}=\pm\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\sqrt{3}}\vec{n}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{n}$$

したがって

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QK}$$
$$=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(1,1,1)$$

ゆえに

$K\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$（複号同順）　　……（答）

[3]

$$f_n(x)=x^{n+1}-x^{n+2}$$

(1) $f_n{}'(x)=(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}$

$a_n=t$ とおくと，接線は

$$y=f_n{}'(t)(x-t)+f_n(t)$$

であり，これが原点を通るから

$$0=-tf'_n(t)+f_n(t)$$

$$0=-t\{(n+1)t^n-(n+2)t^{n+1}\}+t^{n+1}-t^{n+2}$$

$t>0$ より，両辺を t^{n+1} で割ると

$$0=-(n+1)+(n+2)t+1-t$$

したがって，$(n+1)t-n=0$　ゆえに，$a_n=t=\underline{\dfrac{n}{n+1}}$　…… (答)

(2) $0\leqq x\leqq 1$ で $f_n(x)\geqq 0$ より

$S(u)=\int_0^u f_n(x)dx$ とおくと，$B_n=S(1), C_n=S(a_n)$ である．

$$S(u)=\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}-\frac{1}{n+3}x^{n+3}\right]_0^u$$

$$=\left(\frac{1}{n+2}-\frac{u}{n+3}\right)u^{n+2}$$

$$B_n=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\underline{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}$$　…… (答)

$$C_n=\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$=\underline{\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)(n+3)}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}}$$　…… (答)

(3) $$\frac{C_n}{B_n}=\frac{2n+3}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-1-\frac{2}{n}}$$

$$=e^{-1}$$

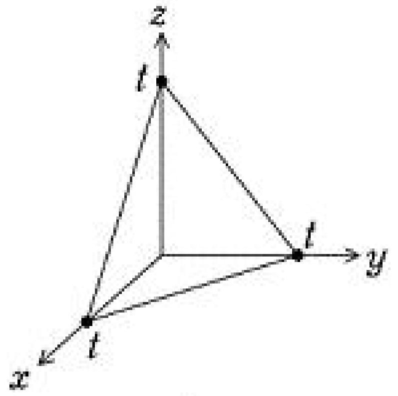
ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=\underline{\frac{2}{e}}$　…… (答)

[4]

(1)　（Ⅰ）$0 \leqq t \leqq 1$　のとき

1 辺が $\sqrt{2}t$ の正三角形となるから，

$$f(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{2}t\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$



（Ⅱ）$1 \leqq t \leqq 2$ のとき

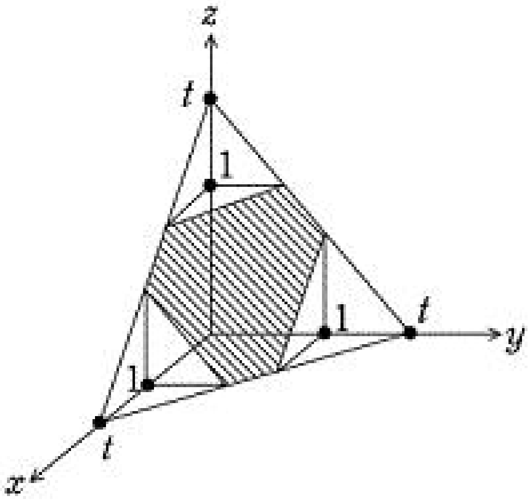
1 辺が $\sqrt{2}t$ の正三角形から

1 辺が $\sqrt{2}(t-1)$ の正三角形を

3 個除いたものとなるから

$$f(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{2}t\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left\{\sqrt{2}(t-1)\right\}^2\cdot 3$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(-2t^2+6t-3)$$

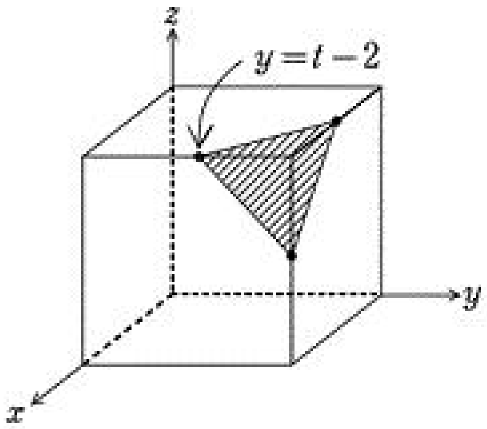


（Ⅲ）$2 \leqq t \leqq 3$ のとき

1 辺が $\sqrt{2}(3-t)$ の正三角形となるから，

$$f(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{2}(3-t)\right)^2$$

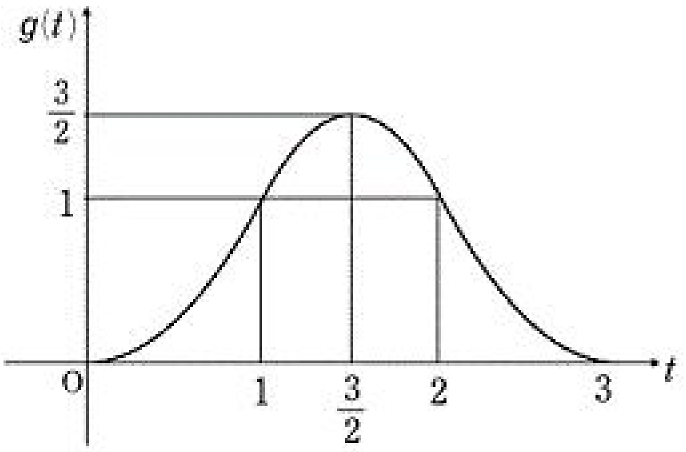
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2$$



(2)　$f(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}g(t)$　とおく．

$\max g(t)=g\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$　だから

$\max f(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3}{2}=\underline{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$　……（答）



(3)　$I=\int_0^3 f(t)dt$　とおく．

$I=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\int_0^3 g(t)dt$ である．

$$\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3}$$

$\int_2^3 g(t)dt$ は上と等しい．

$$\int_1^2 g(t)dt=\int_1^2(-2t^2+6t-3)dt=\frac{4}{3}$$

ゆえに　$\int_0^3 g(t)dt=\dfrac{1}{3}\cdot 2+\dfrac{4}{3}=2$

したがって，　$I=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\underline{\sqrt{3}}$　……（答）