

$$(1) \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ より,}$$

$$2\omega + 1 = \sqrt{3}i$$

両辺平方して

$$4\omega^2 + 4\omega + 1 = -3$$

$$\therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

これより

$$\omega^2 = -\omega - 1$$

両辺, 平方して

$$\omega^4 = \omega^2 + 2\omega + 1$$

よって

$$\omega^2 + \omega^4 = (-\omega - 1) + (\omega^2 + 2\omega + 1)$$

$$= \omega^2 + \omega$$

$$= -1 \quad (\because \textcircled{1})$$

また, ①より

$$\omega^2 = -\omega - 1$$

両辺 ω 倍して

$$\omega^3 = -\omega^2 - \omega$$

$$= 1 \quad (\because \textcircled{1})$$

よって

$$\omega^5 + \omega^{10} = \omega^3 \cdot \omega^2 + (\omega^3)^3 \cdot \omega$$

$$= \omega^2 + \omega \quad (\because \omega^3 = 1)$$

$$= -1 \quad (\because \textcircled{1})$$

以上より

$$\begin{cases} \omega^2 + \omega^4 = -1 \\ \omega^5 + \omega^{10} = -1 \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \quad \omega^n + \omega^{2n}$$

(i) $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = 1 + 1 = 2$$

(ii) $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega + \omega^2 = -1 \quad (\because \textcircled{1})$$

(iii) $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^2 + \omega = -1 \quad (\because \textcircled{1})$$

以上より

$$\omega^n + \omega^{2n} = \begin{cases} 2 & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ -1 & (n \not\equiv 0 \pmod{3}) \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

※合同式に不慣れな学生は, 次のように書くとよい.

(i) $n = 3m$ (m は整数) のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3m} + \omega^{6m}$$

$$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m}$$

$$= 1 + 1 \quad (\because \omega^3 = 1)$$

$$= 2$$

(ii) $n = 3m + 1$ (m は整数) のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3m+1} + \omega^{6m+2}$$

$$= (\omega^3)^m \cdot \omega + (\omega^3)^{2m} \cdot \omega^2$$

$$= 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega^2 \quad (\because \omega^3 = 1)$$

$$= \omega + \omega^2$$

$$= -1 \quad (\because \textcircled{1})$$

(iii) $n = 3m + 2$ (m は整数) のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3m+2} + \omega^{6m+4}$$

$$= (\omega^3)^m \cdot \omega^2 + (\omega^3)^{2m+1} \cdot \omega$$

$$= 1 \cdot \omega^2 + 1 \cdot \omega \quad (\because \omega^3 = 1)$$

$$= \omega^2 + \omega$$

$$= -1 \quad (\because \textcircled{1})$$

以上より

$$\omega^n + \omega^{2n} = \begin{cases} 2 & (n = 3m, m \text{ は整数}) \\ -1 & (n \neq 3m, m \text{ は整数}) \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) 与式を二項定理で展開すると

$$(\omega + 2)^n + (\omega^2 + 2)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cdot \omega^k \cdot 2^{n-k} + \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cdot \omega^{2k} \cdot 2^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cdot 2^{n-k} \cdot (\omega^k + \omega^{2k})$$

ここで, ${}_n C_k \cdot 2^{n-k}$ が整数となることは明らかであり,

(2)より, $\omega^k + \omega^{2k}$ は整数であるから

$k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対し,

$${}_n C_k \cdot 2^{n-k} \cdot (\omega^k + \omega^{2k}) = (\text{整数})$$

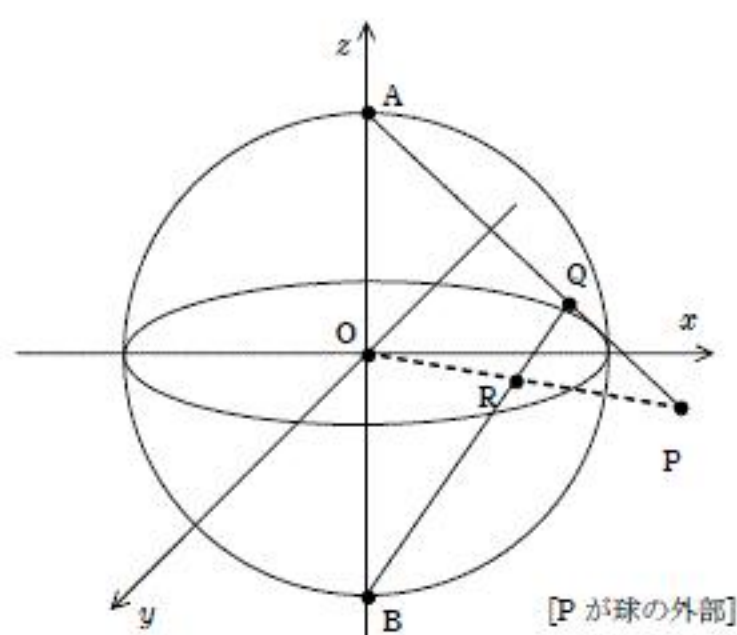
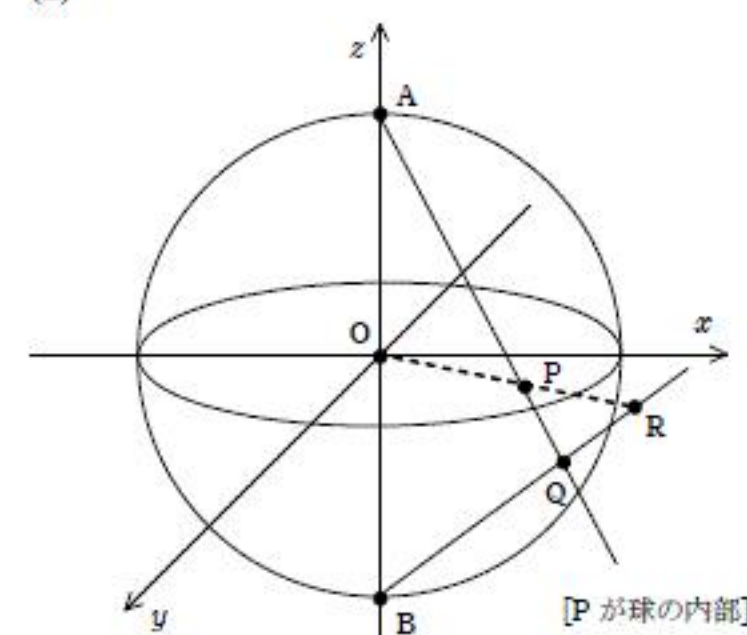
よって, その和

$$\sum_{k=0}^n {}_n C_k \cdot 2^{n-k} \cdot (\omega^k + \omega^{2k}) = (\text{整数}) \text{ とわかる}$$

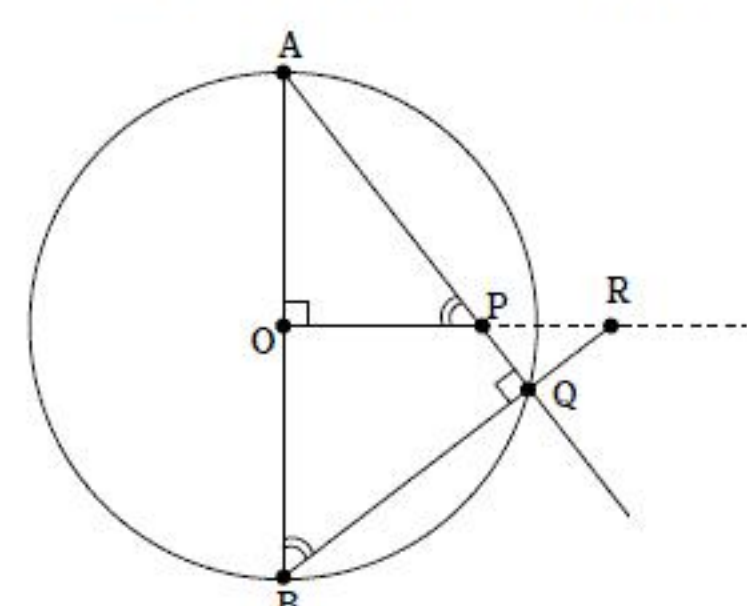
以上より, 題意は示される

[2]

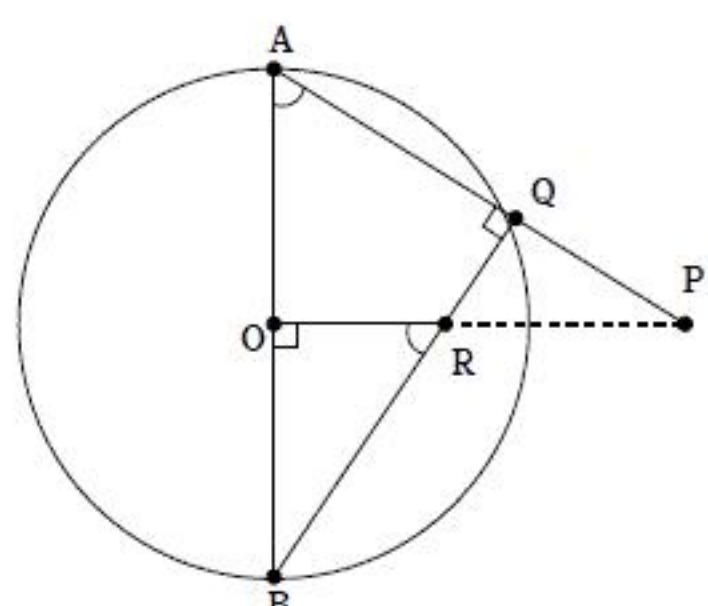
(1)



A, B, Q を通る平面で切断すると,

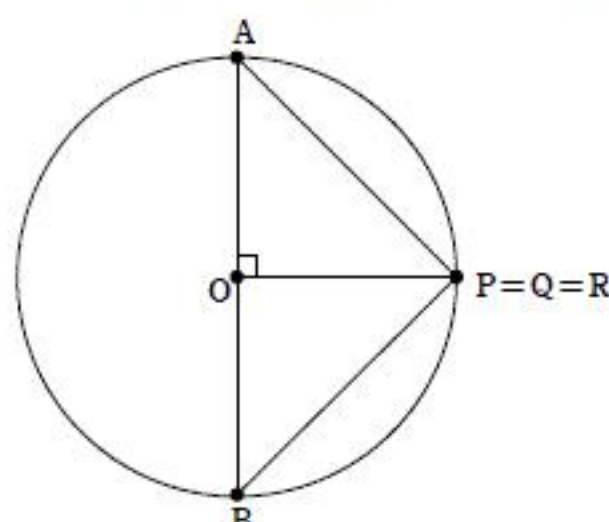


$$\begin{aligned} \triangle AOP &\sim \triangle ROB \text{ より,} \\ AO:OP &= RO:OB \\ \therefore OP \times RO &= AO \times OB \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \triangle BOR &\sim \triangle POA \text{ より,} \\ BO:OR &= PO:OA \\ \therefore OR \times PO &= BO \times OA \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

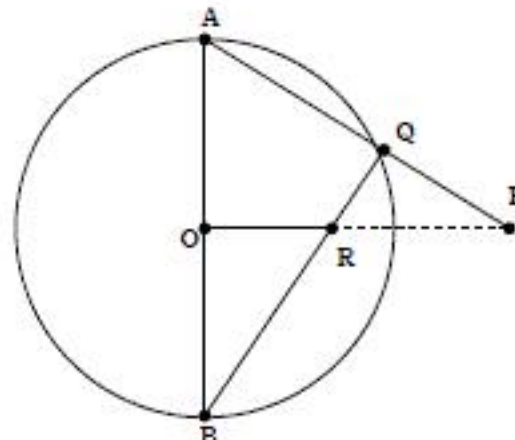
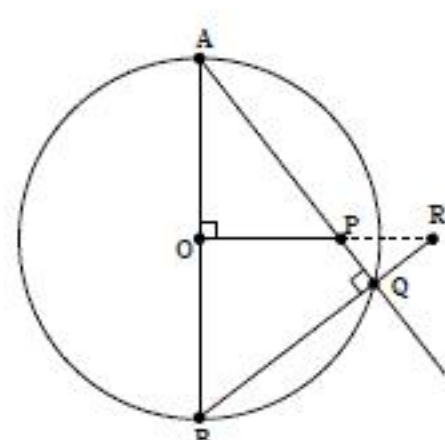
また, P が Q と重なるとき, R も同じ点であるから [P が球の面上]



$$\begin{aligned} OP \times OR &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

以上より, $OP \times OR = 1$ (答)

(2)



条件より

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{OR} & \text{..... ①} \\ \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BR} = 0 & \text{..... ②} \end{cases}$$

①について

$$(s, t, 0) = k(u, v, 0) \text{ より}$$

$$\begin{cases} s = ku \\ t = kv \end{cases} \text{ ①'}$$

②について

$$\begin{aligned} (s, t, -1) \cdot (u, v, 1) \\ = su + tv - 1 = 0 \end{aligned}$$

①' より

$$\begin{aligned} ku^2 + kv^2 - 1 &= 0 \\ k(u^2 + v^2) &= 1 \end{aligned}$$

$R' \neq 0$ は明らかなので, $u^2 + v^2 \neq 0$

$$\therefore k = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

以上より,

$$s = \frac{u}{u^2 + v^2}, t = \frac{v}{u^2 + v^2} \text{ (答)}$$

(3) $ax + by = 1$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) 上を $P(s, t)$ が動くので, s, t は

$$as + bt = 1$$

をみtas.

(2)の結果より

$$a \cdot \frac{u}{u^2 + v^2} + b \cdot \frac{v}{u^2 + v^2} = 1$$

$$au + bv = u^2 + v^2$$

$$u^2 - au + v^2 - bv = 0$$

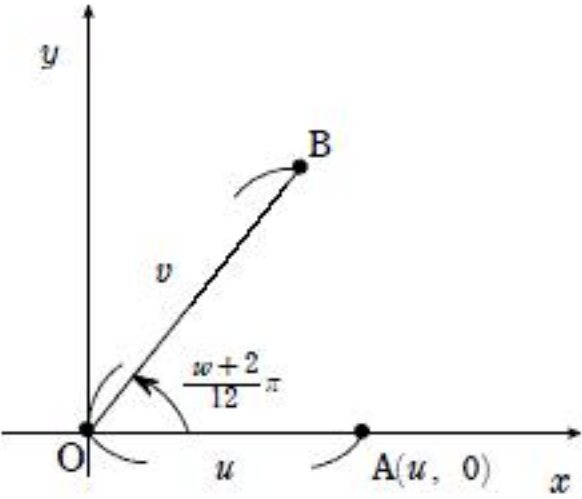
$$\therefore \left(u - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

これは, (u, v) が中心 $\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ の円周上を表す.

以上より, 題意は示される.

※ $R(u, v)$ の軌跡の方程式は, u と v の関係式

[3]



条件より、 A, B は xy 平面上において図のような状況である。

(1) $\triangle OAB$ が正三角形となるのは、 u, v, w がサイコロの目であることに注意すれば

$$u=v \text{ かつ } \frac{w+2}{12}\pi = \frac{\pi}{3}$$

すなわち

$$u=v \text{ かつ } w=2$$

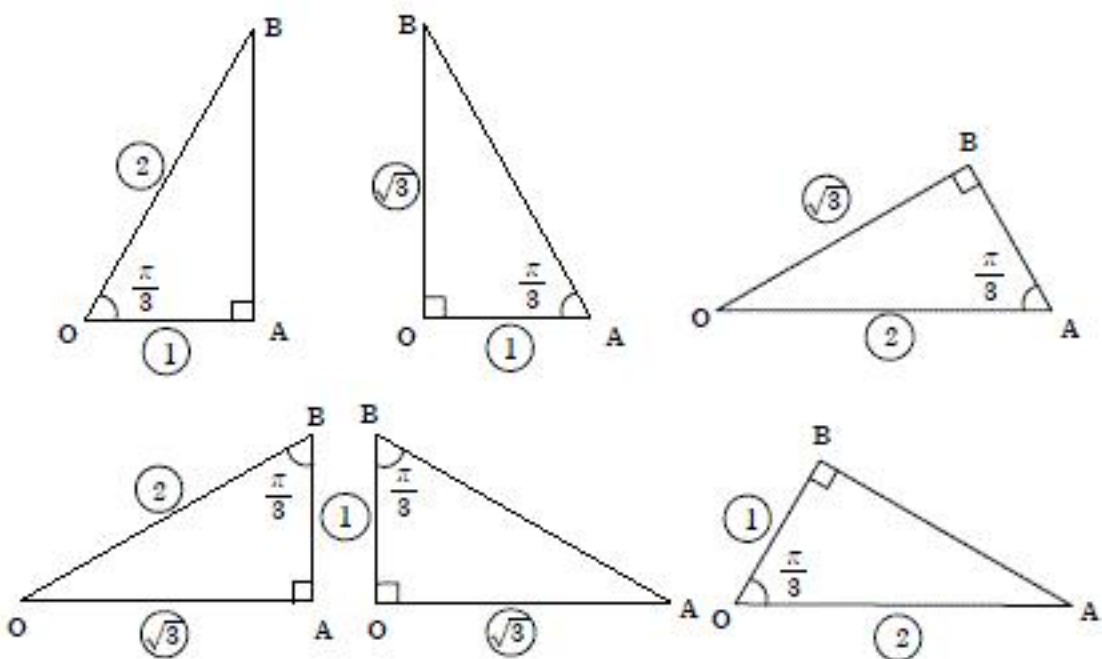
よって、求める確率 P_1 は



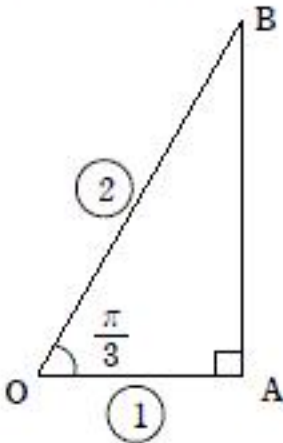
$$P_1 = 1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) $\triangle OAB$ が大きさ $\frac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形になるのは、次の6図

[3]



このうち、 u, v が整数値しかとらないことより、次の2図に限られる。



$$\begin{cases} u:v=1:2 \\ \text{かつ} \\ w=2 \end{cases}$$

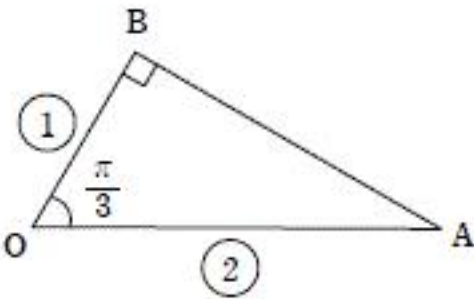
よって、サイコロの目は

u	v	w

1 - 2 - 2
2 - 4 - 2 の3通り
3 - 6 - 2

以上より、求める確率 P_2 は

$$P_2 = \frac{3+3}{6^3} = \frac{1}{36} \quad \dots\dots (\text{答})$$



$$\begin{cases} u:v=2:1 \\ \text{かつ} \\ w=2 \end{cases}$$

よって、サイコロの目は

u	v	w

2 - 1 - 2
4 - 2 - 2 の3通り
6 - 3 - 2

[4]

$$(1) \quad f(x) = 8x^3 - 6x - 1$$

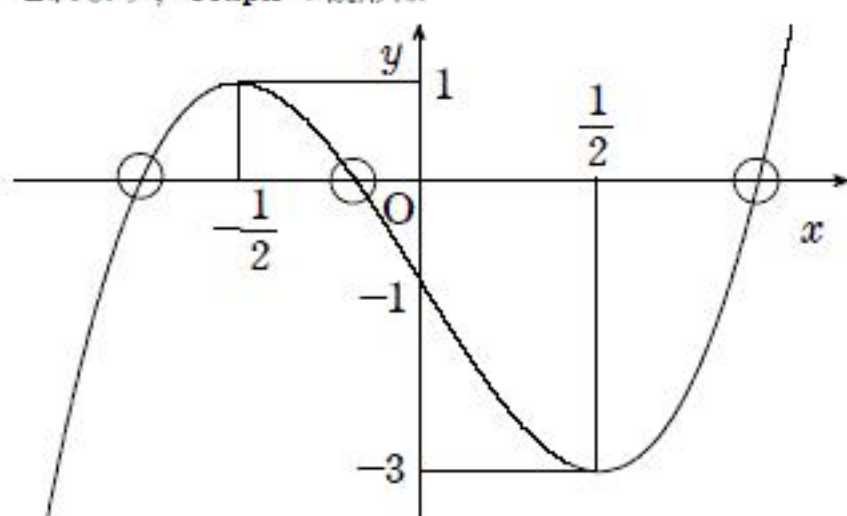
$$f'(x) = 24x^2 - 6 \\ = 6(4x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ として } x = \pm \frac{1}{2}$$

増減表を作成すると

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより、Graph の概形は



図より、 $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3 つ (答)

$$(2) \quad f(a) = 8\cos^3 \frac{5}{9}\pi - 6\cos \frac{5}{9}\pi - 1$$

$$= 2 \left(4\cos^3 \frac{5}{9}\pi - 3\cos \frac{5}{9}\pi \right) - 1$$

$$= 2 \cdot \cos \left(3 \cdot \frac{5}{9}\pi \right) - 1$$

$$= 2\cos \frac{5}{3}\pi - 1$$

$$= 0$$

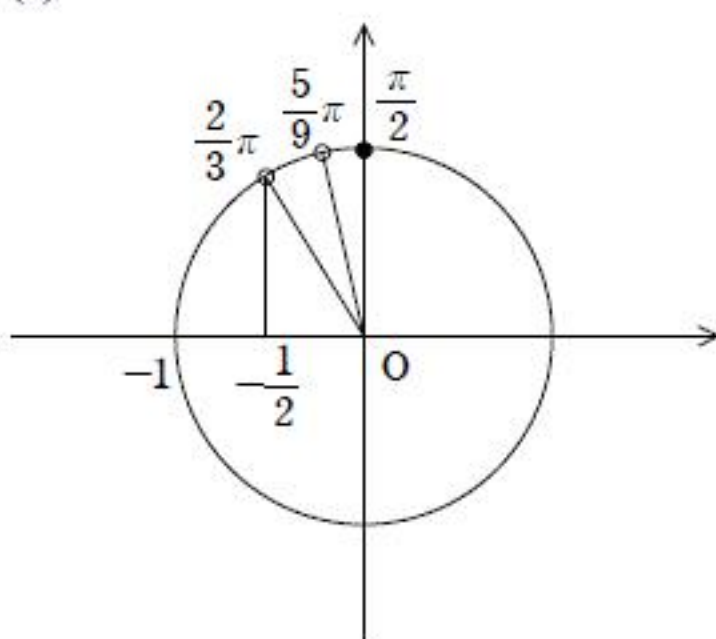
以上より、 $f(a) = 0$ (答)

3 倍角

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

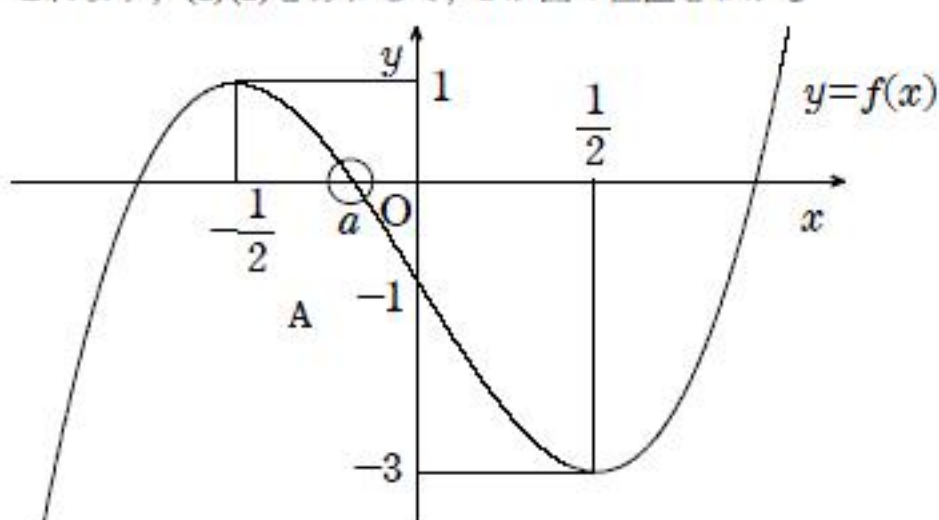
$$\cos \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

(3)



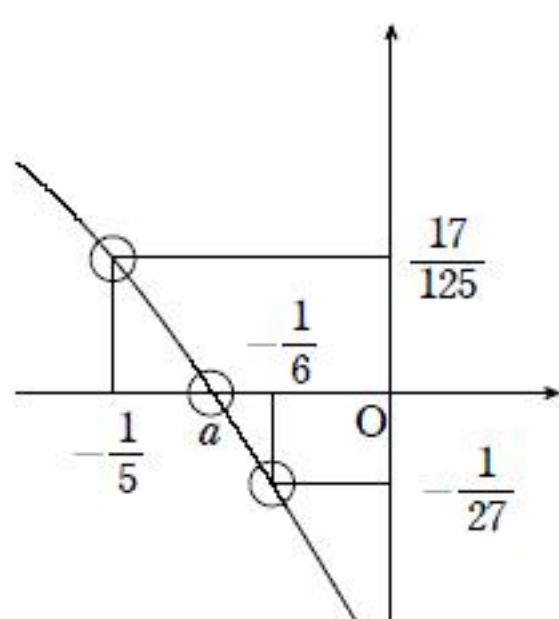
$$\frac{\pi}{2} < \frac{5}{9}\pi < \frac{2}{3}\pi \text{ より, } 0 > \cos \frac{5}{9}\pi > -\frac{1}{2}$$

これより、(1)(2)とあわせて、 a が図の位置とわかる



$-\frac{1}{2} < x < 0$ において $y = f(x)$ は単調減少であり、

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{5}\right) = 8\left(-\frac{1}{5}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{5}\right) - 1 = \frac{17}{125} > 0 \\ f\left(-\frac{1}{6}\right) = 8\left(-\frac{1}{6}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{6}\right) - 1 = -\frac{1}{27} < 0 \end{cases}$$



であることから、 $-\frac{1}{5} < a < -\frac{1}{6}$ がわかる

※中間値の定理