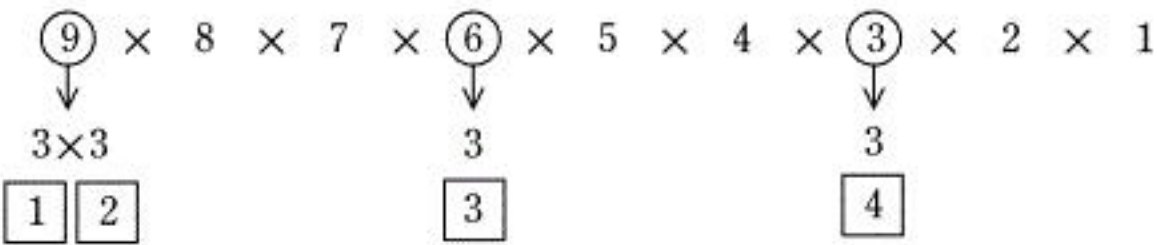


[1]

(1) 3^d が $9!$ の約数となる d の中で最大のものを $f(n)$ とする.

これは、 $9!$ の中に因数 3 がいくつ存在するか である.



これより、4つ含まれるとわかるので、 $f(n)=4$ (答)

※1~9 までに 3 を因数にもつものは $9 \div 3 = 3$ 個
1~9 までに 3^2 を因数にもつものは $9 \div 3^2 = 1$ 個
よって $3+1=4$ (答)

(2) 5^d が $25!$ の約数となる d の中で最大のものを $f(n)$ とする.

これは、 $25!$ の中に因数 5 がいくつ存在するか であるから

1~25 までに 5 を因数にもつものは $25 \div 5 = 5$ 個

1~25 までに 5^2 を因数にもつものは $25 \div 5^2 = 1$ 個

よって $f(n)=5+1=6$ (答)

(3) 同様に考えれば、

1~ p^m までに p を因数にもつものは $p^m \div p = p^{m-1}$ 個

1~ p^m までに p^2 を因数にもつものは $p^m \div p^2 = p^{m-2}$ 個

1~ p^m までに p^3 を因数にもつものは $p^m \div p^3 = p^{m-3}$ 個

⋮

1~ p^m までに p^m を因数にもつものは $p^m \div p^m = 1$ 個

よって、

$$f(n) = p^{m-1} + p^{m-2} + p^{m-3} + \dots + 1$$
$$= \frac{1-p^m}{1-p} \quad (\because p \neq 1) \quad \dots\dots (答)$$

[2]

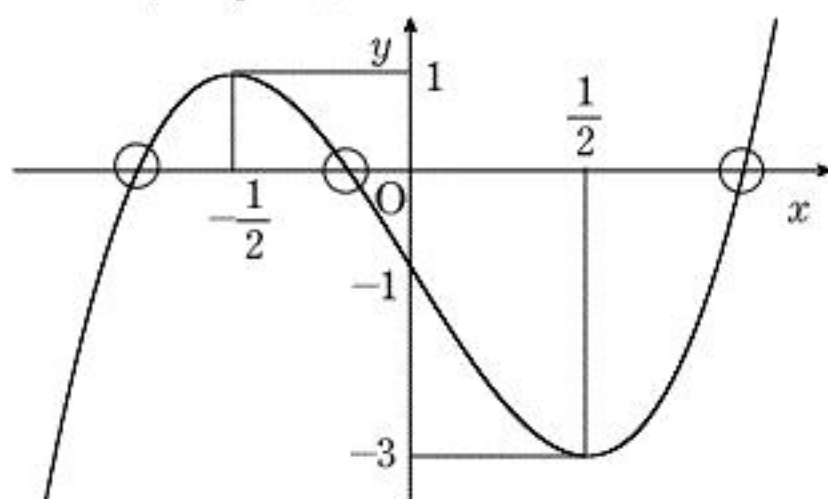
$$(1) \quad \begin{aligned} f(x) &= 8x^3 - 6x - 1 \\ f'(x) &= 24x^2 - 6 \\ &= 6(4x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ として } x = \pm \frac{1}{2}$$

増減表を作成すると

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより、Graph の概形は



図より、 $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3 つ …… (答)

$$(2) \quad f(a) = 8\cos^3 \frac{5}{9}\pi - 6\cos \frac{5}{9}\pi - 1$$

$$= 2 \left(4\cos^3 \frac{5}{9}\pi - 3\cos \frac{5}{9}\pi \right) - 1$$

$$= 2 \cdot \cos \left(3 \cdot \frac{5}{9}\pi \right) - 1$$

$$= 2\cos \frac{5}{3}\pi - 1$$

$$= 0$$

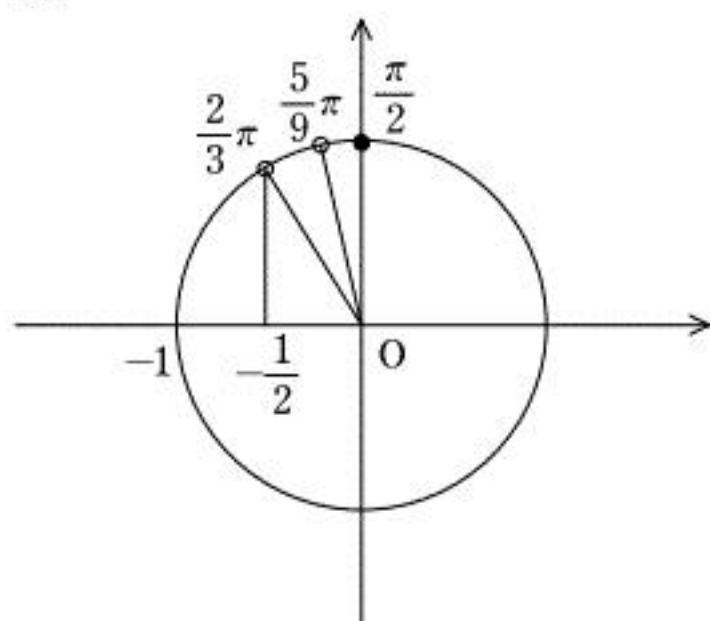
3 倍角

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

$$\cos \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

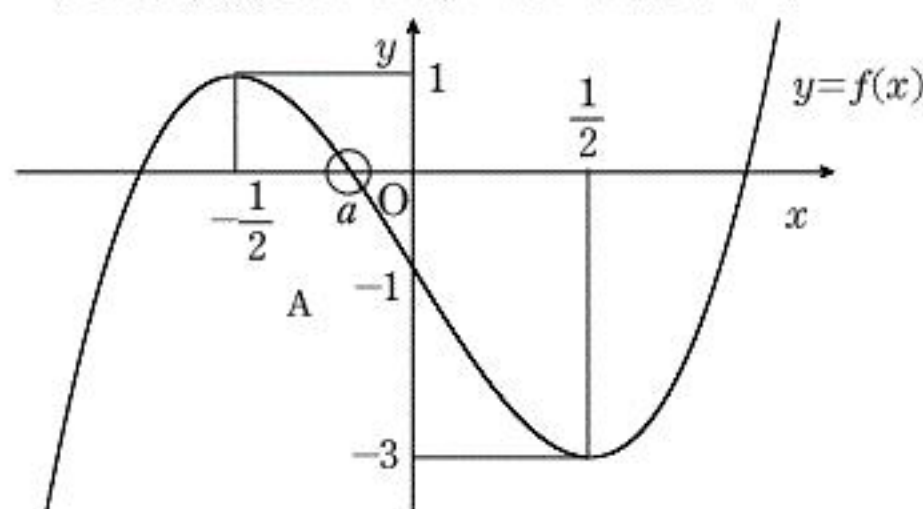
以上より、 $f(a) = 0$ …… (答)

(3)



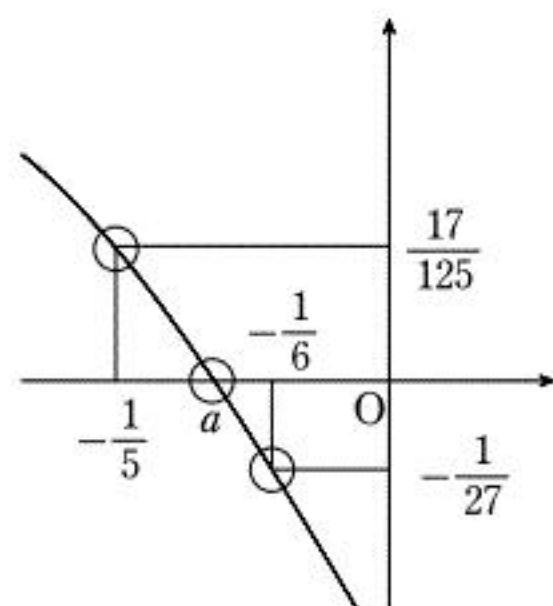
$$\frac{\pi}{2} < \frac{5}{9}\pi < \frac{2}{3}\pi \text{ より, } 0 > \cos \frac{5}{9}\pi > -\frac{1}{2}$$

これより、(1)(2)とあわせて、 a が図の位置とわかる



$-\frac{1}{2} < x < 0$ において $y = f(x)$ は単調減少であり、

$$\left\{ \begin{aligned} f\left(-\frac{1}{5}\right) &= 8\left(-\frac{1}{5}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{5}\right) - 1 = \frac{17}{125} > 0 \\ f\left(-\frac{1}{6}\right) &= 8\left(-\frac{1}{6}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{6}\right) - 1 = -\frac{1}{27} < 0 \end{aligned} \right.$$



であることから、 $-\frac{1}{5} < a < -\frac{1}{6}$ がわかる

※中間値の定理

$$(1) \quad f_a(x) = axe^{-\frac{x}{a}}$$

$$\begin{aligned} f'_a(x) &= ae^{-\frac{x}{a}} + ax \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) e^{-\frac{x}{a}} \\ &= (a-x)e^{-\frac{x}{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_a(x) &= -e^{-\frac{x}{a}} + (a-x) \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) e^{-\frac{x}{a}} \\ &= \left(\frac{x}{a} - 2\right) \cdot e^{-\frac{x}{a}} \end{aligned}$$

$$f''_a(x) = 0 \text{ として } x = 2a$$

この前後で $f_a(x)$ の凹凸が変わるので、変曲点 P の x 座標は $x = 2a$ とわかる

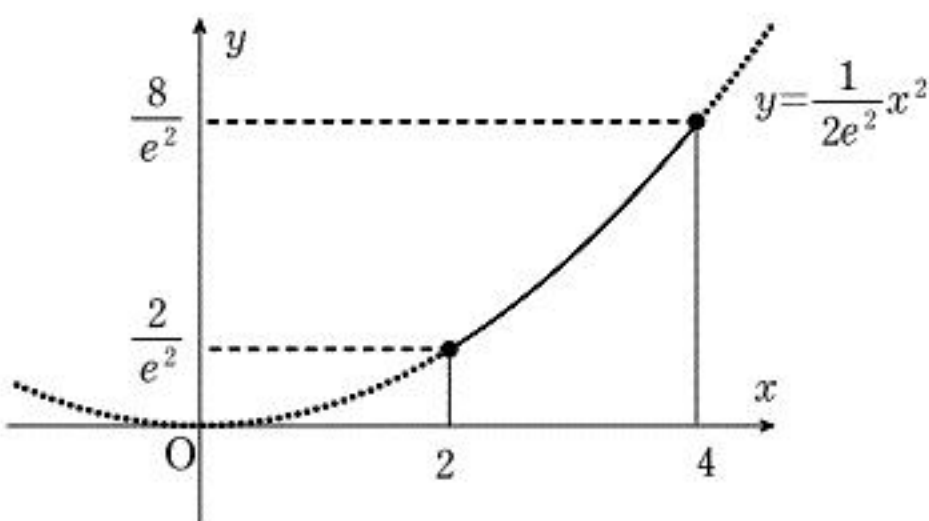
$$\text{よって } P\left(2a, \frac{2a^2}{e^2}\right) \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) P の軌跡について

$$\begin{cases} X = 2a \\ Y = \frac{2a^2}{e^2} \end{cases} \text{ とおくと, } Y = \frac{2\left(\frac{X}{2}\right)^2}{e^2} = \frac{X^2}{2e^2}$$

$$1 \leq a \leq 2 \text{ より, } y = \frac{x^2}{2e^2} \quad (2 \leq x \leq 4)$$

図示すれば、下図実線部



(3) $y = f_a(x)$ の Graph の概形を考える

$$f'_a(x) = (a-x)e^{-\frac{x}{a}}$$

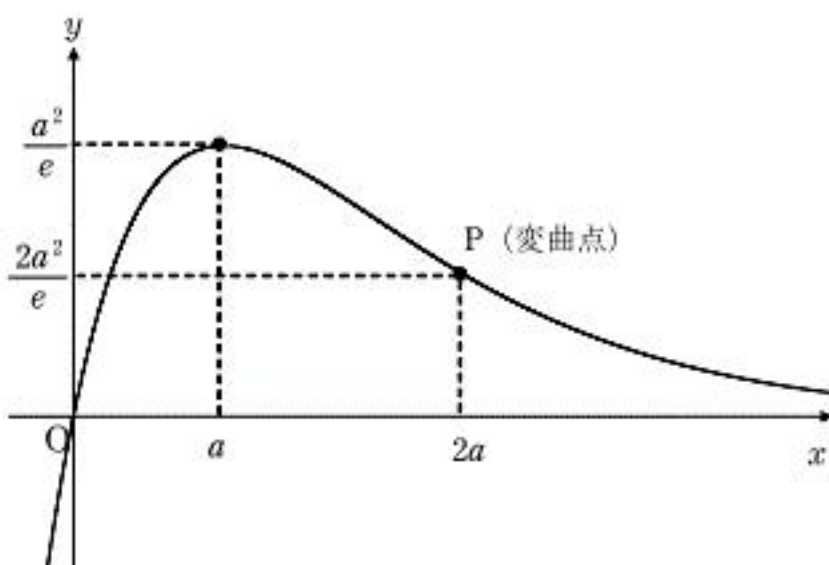
$$f'_a(x) = 0 \text{ として, } x = a$$

増減表

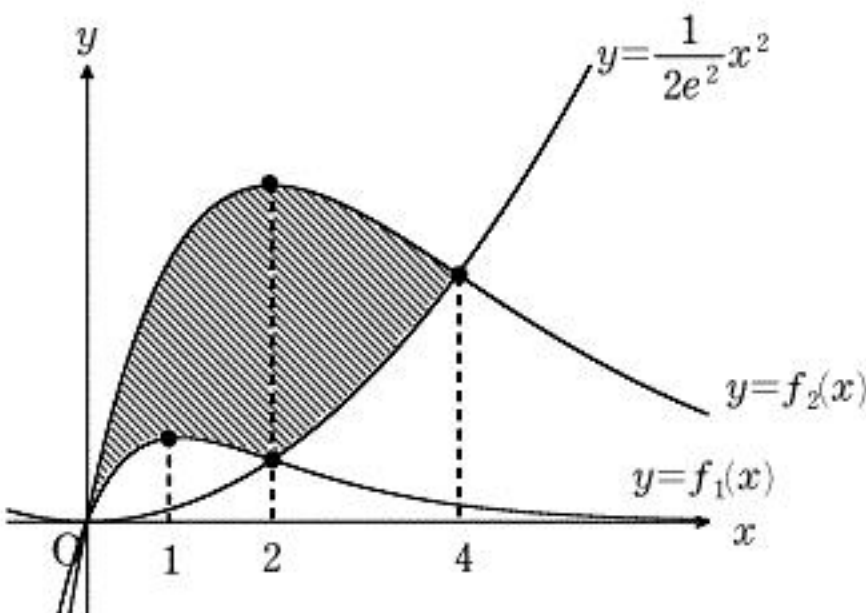
x	0	...	a	...
$f'_a(x)$		+	0	-
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{a^2}{e}$	$\searrow$

($\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0$)

Graph



これより、 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, 曲線 C で囲まれる図形は下図斜線部



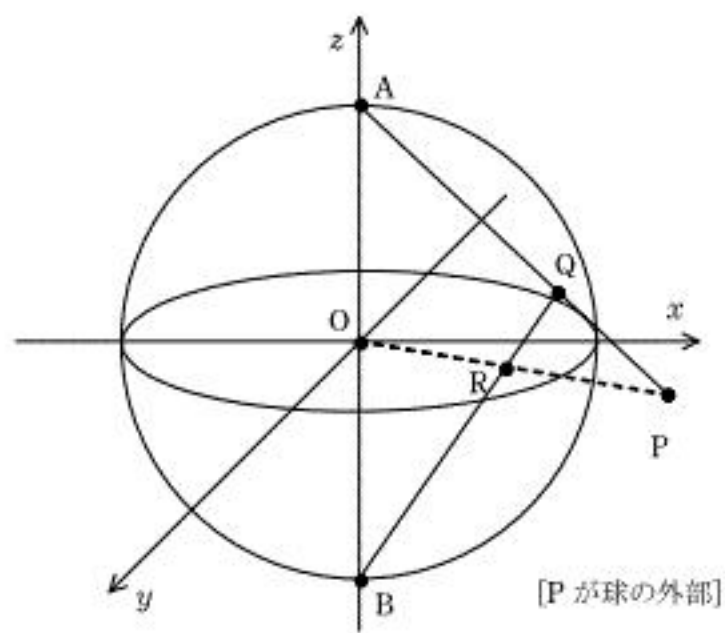
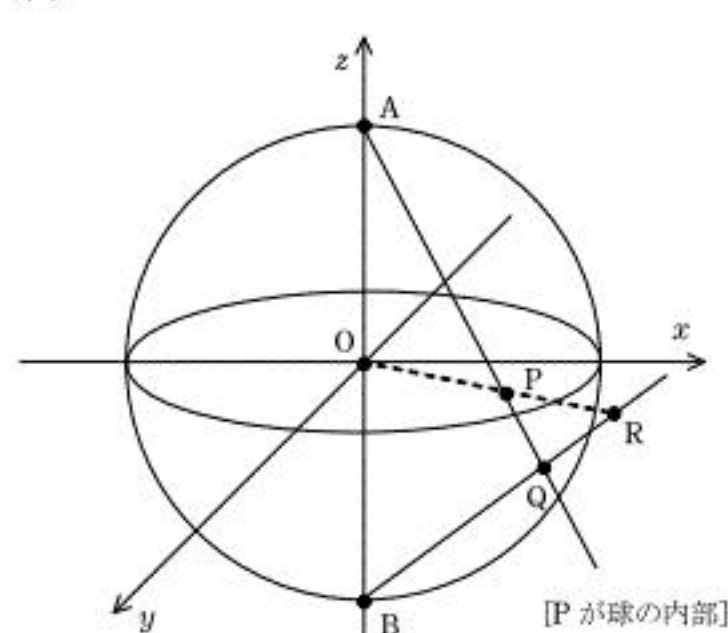
求める面積 S (下図) について



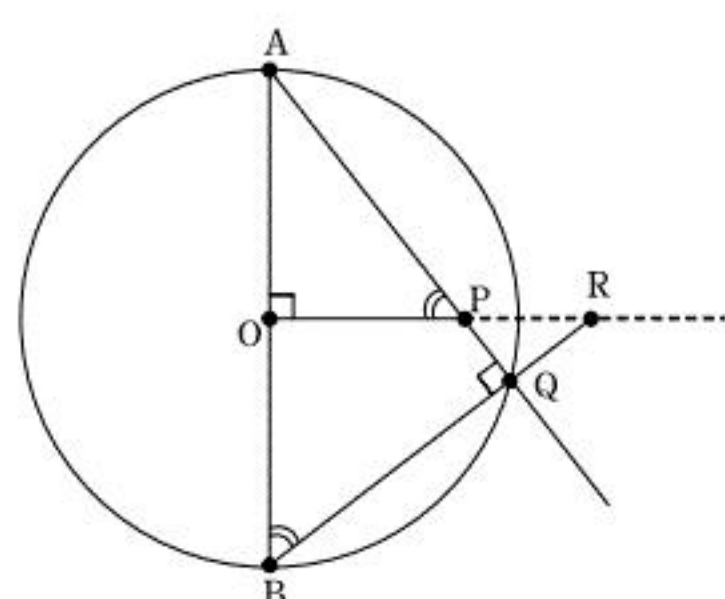
$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \left(2xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2e^2}x^2 \right) dx - \int_0^2 \left(xe^{-x} - \frac{1}{2e^2}x^2 \right) dx \\ &= \left(\int_0^4 2xe^{-\frac{x}{2}} dx - \int_0^4 \frac{1}{2e^2}x^2 dx \right) - \left(\int_0^2 xe^{-x} dx - \int_0^2 \frac{1}{2e^2}x^2 dx \right) \\ &= \left(2 \left[-2xe^{-\frac{x}{2}} \right]_0^4 + 4 \int_0^4 e^{-\frac{x}{2}} dx - \left[\frac{1}{6e^2}x^3 \right]_0^4 \right) - \left(\left[-xe^{-x} \right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx - \left[\frac{1}{6e^2}x^3 \right]_0^2 \right) \\ &= \left(-\frac{16}{e^2} - \frac{8}{e^2} + 8 - \frac{32}{3e^2} \right) - \left(-\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} + 1 - \frac{4}{3e^2} \right) \\ &= 7 - \frac{91}{3e^2} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

[4]

(1)



A, B, Q を通る平面で切断すると,

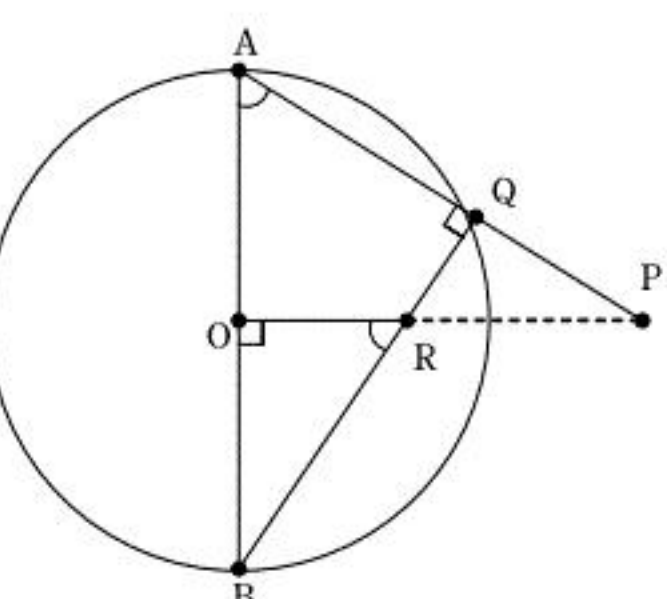
 $\triangle AOP \sim \triangle ROB$ より,

$$AO:OP = RO:OB$$

$$\therefore OP \times RO = AO \times OB$$

$$= 1 \times 1$$

$$= 1$$

 $\triangle BOR \sim \triangle POA$ より,

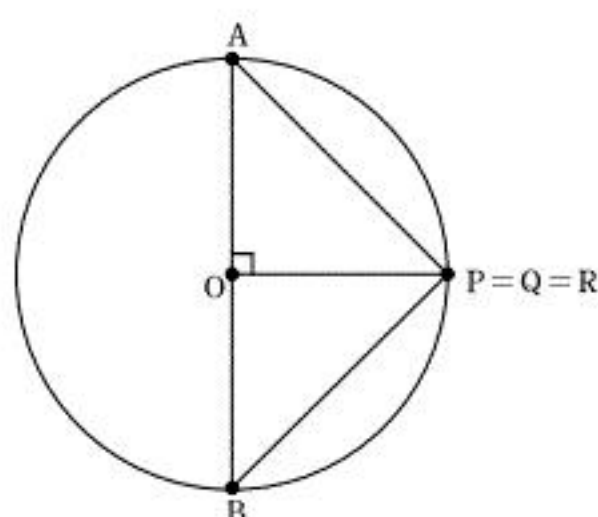
$$BO:OR = PO:OA$$

$$\therefore OR \times PO = BO \times OA$$

$$= 1 \times 1$$

$$= 1$$

また, P が Q と重なるとき, R も同じ点であるから [P が球の面上]

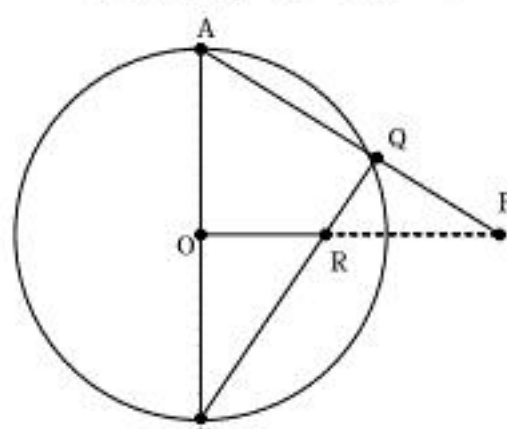
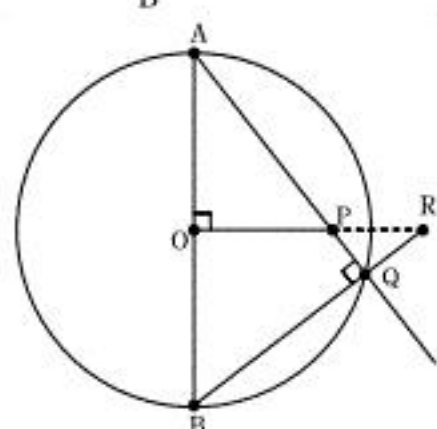


$$OP \times OR = 1 \times 1$$

$$= 1$$

以上より, $OP \times RO = 1$ (答)

(2)



条件より

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{OR} & \text{..... ①} \\ \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BR} = 0 & \text{..... ②} \end{cases}$$

①について

$$(s, t, 0) = k(u, v, 0) \text{ より}$$

$$\begin{cases} s = ku & \text{..... ①'} \\ t = kv & \text{..... ②'} \end{cases}$$

②について

$$(s, t, -1) \cdot (u, v, 1)$$

$$= su + tv - 1 = 0$$

①' より

$$ku^2 + kv^2 - 1 = 0$$

$$k(u^2 + v^2) = 1$$

 $R' \neq 0$ は明らかなので, $u^2 + v^2 \neq 0$

$$\therefore k = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

以上より,

$$s = \frac{u}{u^2 + v^2}, t = \frac{v}{u^2 + v^2} \quad \text{..... (答)}$$

(3) l を $ax + by = c$ とおくと, l は原点を通らないことより, $c \neq 0$ 点 $P(s, t)$ が l 上を動くので, s, t は

$$as + bt = c$$

をみtas.

(2)の結果より

$$a \cdot \frac{u}{u^2 + v^2} + b \cdot \frac{v}{u^2 + v^2} = c$$

$$au + bv = c(u^2 + v^2)$$

$$u^2 - \frac{a}{c}u + v^2 - \frac{b}{c}v = 0$$

$$\left(u - \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(v - \frac{b}{2c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4c^2}$$

これは点 (u, v) が, 中心 $\left(\frac{a}{2c}, \frac{b}{2c}\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|c|}$ の円周上を動くことを表す.

以上より, 題意は示される