

(1) $y = x^3 - 5x$, 接点 $(t, t^3 - 5t)$ とおくと, その接線は,

$$\begin{aligned} y &= (3t^2 - 5)(x - t) + t^3 - 5t \\ &= (3t^2 - 5)x - 2t^3 \end{aligned}$$

これが $(1, 0)$ を通るので,

$$\begin{aligned} 0 &= (3t^2 - 5) \cdot 1 - 2t^3 \\ \therefore 2t^3 - 3t^2 + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$t = -1$ のとき, $-2 - 3 + 5 = 0$ より, $2t^3 - 3t^2 + 5$ は $t + 1$ を因数にもつ.

$$\begin{array}{r} 2t^2 - 5t + 5 \\ t+1 \overline{) 2t^3 - 3t^2 + 5} \\ \underline{2t^3 + 2t^2} \\ -5t^2 \\ \underline{-5t^2 - 5t} \\ 5t + 5 \\ \underline{5t + 5} \\ 0 \end{array}$$

よって,

$$\begin{aligned} (t+1)(2t^2 - 5t + 5) &= 0 \\ \therefore t &= -1, \frac{5 \pm \sqrt{15}i}{4} \end{aligned}$$

t は実数より, $t = -1$

よって, 接線の方程式は,

$$\underline{\underline{y = -2x + 2}}$$

(2) $y = x^3 - ax$, 接点 $(t, t^3 - at)$ とおくと, その接線は,

$$y = (3t^2 - a)x - 2t^3$$

これが $(1, 0)$ を通るので,

$$\begin{aligned} 0 &= (3t^2 - a) \cdot 1 - 2t^3 \\ \therefore 2t^3 - 3t^2 + a &= 0 \end{aligned}$$

この方程式が異なる 3 実解をもてばよい.

分離して,

$$\begin{cases} y = a \\ y = -2t^3 + 3t^2 \end{cases}$$

これらのグラフが異なる 3 交点をもつための条件を考える.

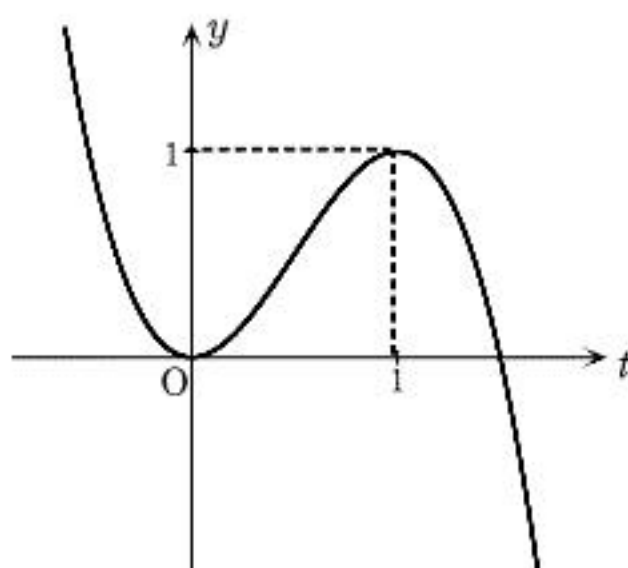
$$\begin{aligned} y' &= -6t^2 + 6t \\ &= -6t(t-1) \end{aligned}$$

$y' = 0$ として, $t = 0, 1$

増減表を描けば,

t	...	0	...	1	...
y'	-	0	+	0	-
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

グラフの概形は,



これが, $y = a$ と異なる 3 点で交わるためには,

$$\underline{\underline{0 < a < 1}}$$

(1)

$$\begin{aligned} 2^{n+3} - 2^n &= 2^3 \cdot 2^n - 2^n \\ &= 7 \cdot 2^n \end{aligned}$$

これより、 2^{n+3} と 2^n を 7 で割った余りは等しい.

よって、

$$R(2^{n+3}) = R(2^n)$$

(2) (1)より、

$$\begin{aligned} R(2^{2017}) &= R(2^{2014}) \\ &= R(2^{2011}) \\ &\vdots \\ &= R(2^4) \\ &= R(2^1) \\ &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{※ } 2017 = 3 \times 672 + 1 \text{ より,} \\ R(2^{2017}) = R(2^{1+3 \times 672}) \\ \quad = R(2^1) \\ \text{としてもよい.} \end{array} \right)$$

(3)

$$2^{2017} \equiv 2 \quad (\text{以下, mod.7 とする})$$

$$2^{29} \equiv 2^2$$

$$\equiv 4 \text{ より,}$$

$$2^{2017} m + 2^{29} \equiv 2m + 4$$

条件より、

$$2m + 4 \equiv 5$$

$$\therefore 2m \equiv 1$$

これより、 $2m = 7k + 1$ (k は整数) とかける.

$$2m - 7k = 1$$

この方程式の特殊解は、 $(4, 1)$ より、

$$2 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 1 \text{ から,}$$

$$2(m-4) - 7(k-1) = 0$$

$$\therefore 2(m-4) = 7(k-1)$$

よって、

$$\begin{cases} m-4=7l \\ k-1=2l \end{cases} \quad (l \text{ は 整数})$$

$$\therefore m = 4 + 7l$$

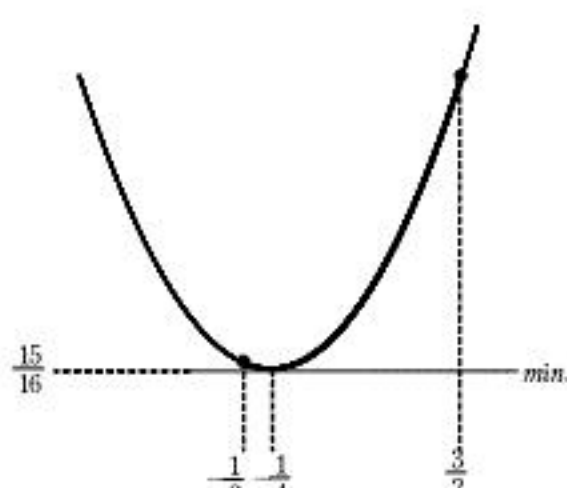
$$\equiv 4$$

ゆえに、

$$R(m) = \underline{\underline{4}}$$

- (1) $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ の、 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ における最小値 $m\left(\frac{1}{2}\right)$ を求める.

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}$$



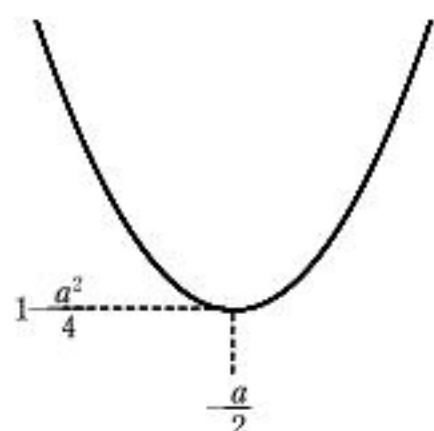
図により,

$$m\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{15}{16}}}$$

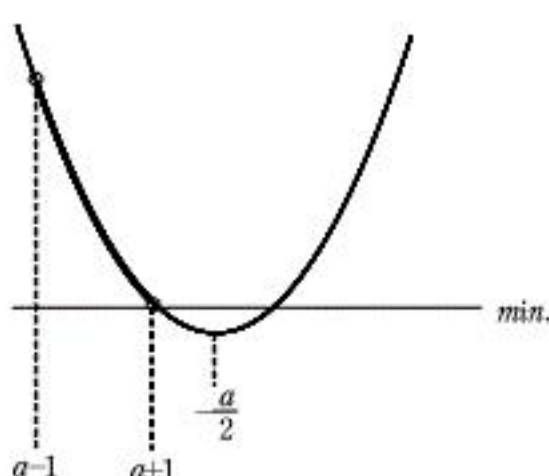
- (2)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + ax + 1 \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

区間 $a-1 \leq x \leq a+1$ における最小値を
グラフを用いて考えると,



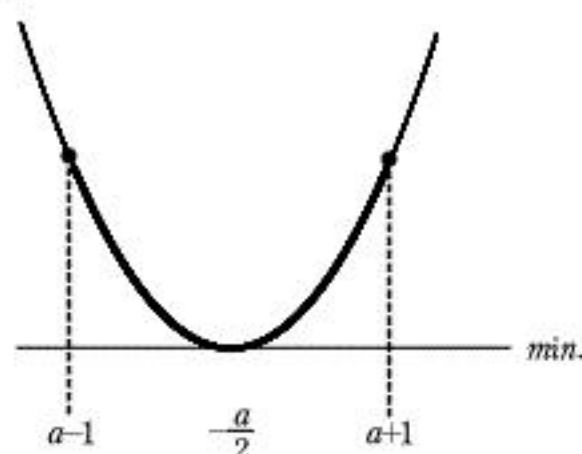
- (i)



$a+1 < -\frac{a}{2}$ のとき, すなわち, $a < -\frac{2}{3}$ のとき

$$m(a) = f(a+1) = 2a^2 + 3a + 2$$

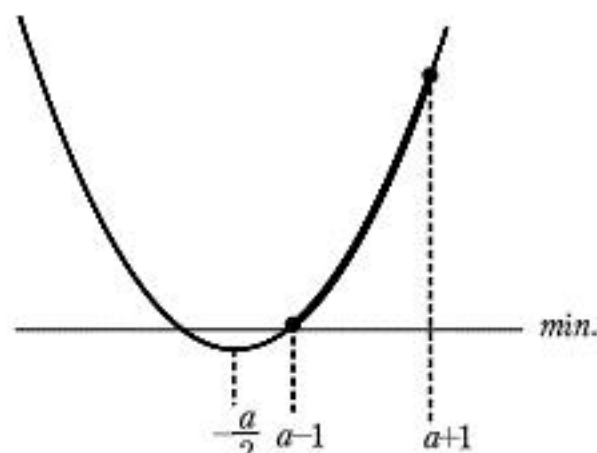
- (ii)



$a-1 \leq -\frac{a}{2} \leq a+1$ のとき, すなわち, $-\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{2}{3}$ のとき

$$m(a) = f\left(-\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{a^2}{4}$$

- (iii)



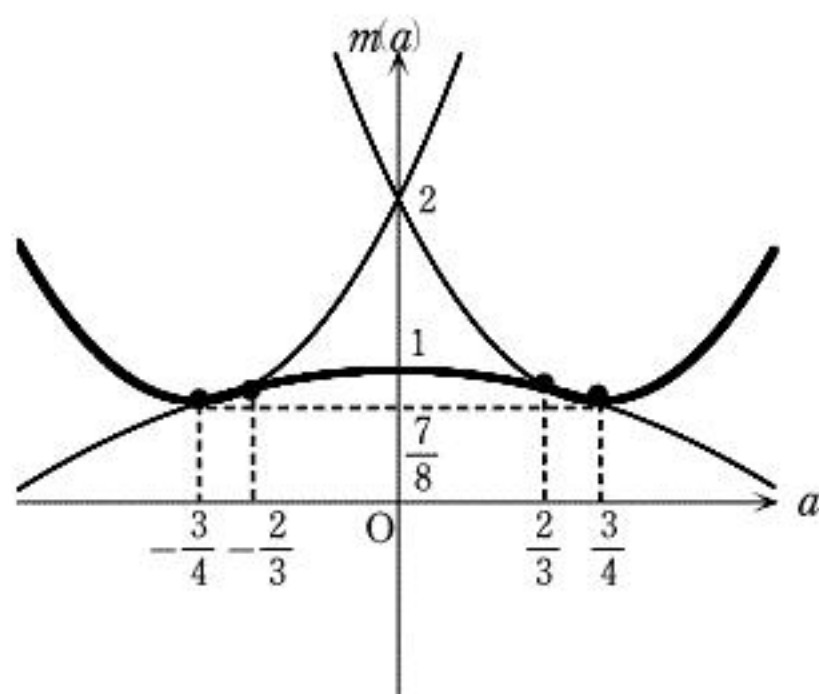
$-\frac{a}{2} < a-1$ のとき, すなわち, $\frac{2}{3} < a$ のとき

$$m(a) = f(a-1) = 2a^2 - 3a + 2$$

以上(i)(ii)(iii)より,

$$m(a) = \begin{cases} 2a^2 + 3a + 2 & \left(a < -\frac{2}{3} \text{ のとき}\right) \\ 1 - \frac{a^2}{4} & \left(-\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{2}{3} \text{ のとき}\right) \\ 2a^2 - 3a + 2 & \left(\frac{2}{3} < a \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

- (3) (2)の結果をもとにグラフの概形を描けば,



上図の太線部.

図より, 求める最小値は $\underline{\underline{\frac{7}{8}}}$

このとき,

$$a = \pm \frac{3}{4}$$

- (1) $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = 0$ を示せばよい.

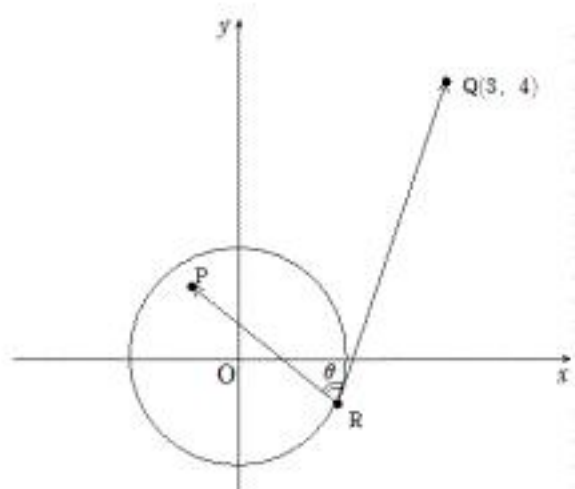
$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}) \cdot \overrightarrow{RQ} \\
 &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{RQ} \\
 &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{OR} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}) \\
 &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OR}|^2 \\
 &= 0 \quad (\because \text{条件式より})
 \end{aligned}$$

よって,

$$\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{RQ}$$

- (2)

$$\begin{cases} Q(3, 4) \\ |\overrightarrow{OR}| = 1 \\ |\overrightarrow{OP}| \leq 1 \end{cases} \quad \text{より, } R \text{ は単位円周上の点であり, } P \text{ はその内部および周上の点である.}$$



$\angle PRQ = \theta$ とする. ($0^\circ \leq \theta < 2\pi$)

(1)と同様にして, $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \leq 0$ がわかるので, 内積の定義より,

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{RP}| |\overrightarrow{RQ}| \cos \theta &\leq 0 \\
 \therefore \cos \theta &\leq 0
 \end{aligned}$$

よって, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

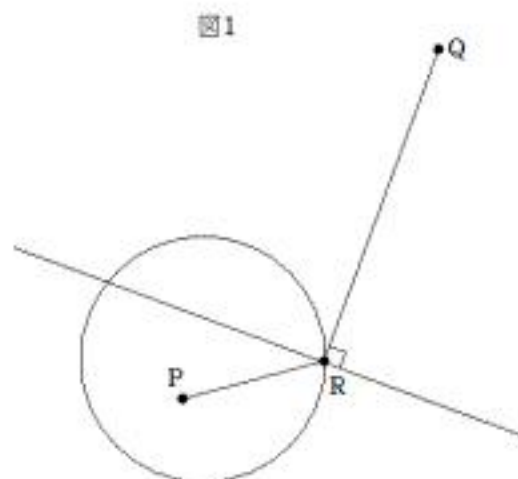


図1

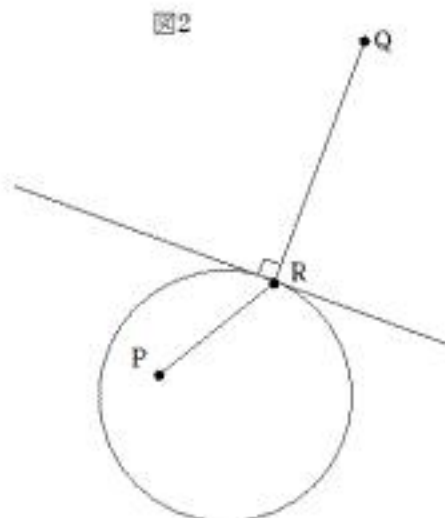
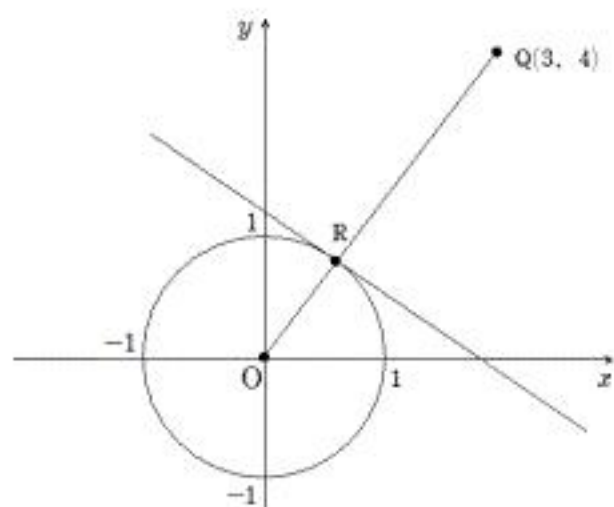


図2

図を利用して考えれば, $\overrightarrow{QR}$ と直交し R を通る直線に対し, Q と反対側に P が存在しなければならない. 単位円の内部および周上のすべての点を P はとるので, 図2の状態でなければならない.



よって,

$$\underline{\underline{R\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}}$$