

1

(1)

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = 15 \quad \text{通り}$$

(2)

$$\frac{{}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_2}{2!} = 105 \quad \text{通り}$$

(3)

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_3 + \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_1}{2!}}{{}_8C_7 \times \frac{{}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_2}{2!}} = \frac{5}{28}$$

A, B が選ばれ, かつ 同組になるのは次の 2 通り,

$$(A, B), (\square, \square), (\square, \square, \square)$$

$${}_6C_2 \times {}_4C_3$$

$$(\square, \square), (\square, \square), (A, B, \square)$$

$${}_6C_1 \times \frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2}{2!}$$

(1)

真数条件より, $x > 0$ 図のように, 接点 $A(\alpha, \log(2\alpha)), B(\beta, 2\log \beta)$ とする. l は A における接線であるから,

$$y = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) + \log 2\alpha \text{ より,}$$

$$y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \log 2\alpha \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 l は B における接線であるから,

$$y = \frac{2}{\beta}(x - \beta) + 2\log \beta \text{ より,}$$

$$y = \frac{2}{\beta}x - 2 + 2\log \beta \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②は同一の直線であることから,

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\beta} \\ -1 + \log 2\alpha = -2 + 2\log \beta \end{cases}$$

これより, $\beta = 2\alpha$ であるから,

$$-1 + \log(2\alpha) = -2 + 2\log(2\alpha)$$

$$\log(2\alpha) = 1$$

$$\therefore \alpha = \frac{e}{2}, \beta = e$$

このとき, 直線 l は,

$$\underline{\underline{y = \frac{2}{e}x}}$$

(2)

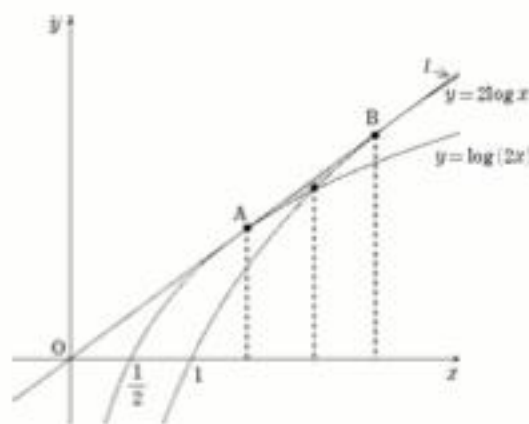
 C_1 と C_2 の交点を求めると,

$$\begin{cases} y = \log(2x) \\ y = 2\log x \end{cases} \text{ より, } x^2 = 2x$$

$$x > 0 \quad \text{より, } x = 2$$

よって, 交点 $(2, 2\log 2)$ 求める面積を S とすれば,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{e}{2}}^2 \left\{ \frac{2}{e}x - \log(2x) \right\} dx + \int_2^e \left\{ \frac{2}{e}x - 2\log x \right\} dx \\ &= \int_{\frac{e}{2}}^2 \frac{2}{e}x dx - \int_{\frac{e}{2}}^2 \log 2x dx + \int_2^e \frac{2}{e}x dx - \int_2^e 2\log x dx \\ &= \int_{\frac{e}{2}}^e \frac{2}{e}x dx - \int_{\frac{e}{2}}^2 \log 2x dx - \int_2^e 2\log x dx \\ &= \left[\frac{1}{e}x^2 \right]_{\frac{e}{2}}^e - \left[x\log 2 + x\log x - x \right]_{\frac{e}{2}}^2 - 2 \left[x\log x - x \right]_2^e \\ &= \left(e - \frac{e}{4} \right) - \left\{ (4\log 2 - 2) - \left(\frac{e}{2}\log 2 + \frac{e}{2}\log \frac{e}{2} - \frac{e}{2} \right) \right\} - 2 \{ (e - e) - (2\log 2 - 2) \} \\ &= \frac{3}{4}e - (4\log 2 - 2) - (-4\log 2 + 4) \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{4}e - 2}} \end{aligned}$$



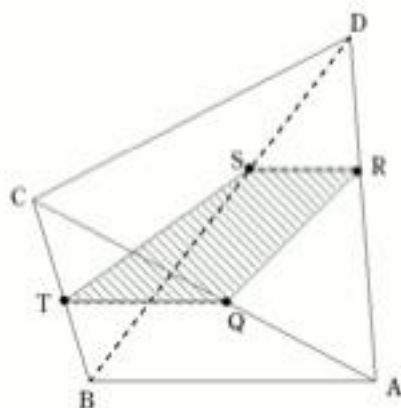
AC 上の点 Q は,

とかける。

いま、 Q の z 座標は t であるから、

よって、

(2)



(1)と同様に P を通り z 軸に垂直な平面と,

AD, BD, BCとの交点を、それぞれR, S, Tとすれば、

であり、この平面 $QRST$ を z 軸まわりに回転させてできる図形は半径 PQ の円に等しい。
よって、その面積は、

以上より、求める体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{2}} \pi(1 - \sqrt{2}t + t^2) dt \\ &= \pi \left[t - \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{3} \pi}} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{cases} z_{2n+1} - z_{2n} = \alpha(z_{2n} - z_{2n-1}) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ z_{2n+2} - z_{2n+1} = \bar{\alpha}(z_{n+1} - z_{2n}) & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② より,

$$\begin{aligned} z_{2n+2} - z_{2n+1} &= \bar{\alpha}(\alpha(z_{2n} - z_{2n-1})) \\ &= |\alpha|^2(z_{2n} - z_{2n-1}) \cdots \cdots \textcircled{2'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{2n+1} - z_{2n} &= \alpha(\bar{\alpha}(z_{2n-1} - z_{2n-2})) \\ &= |\alpha|^2(z_{2n-1} - z_{2n-2}) \cdots \cdots \textcircled{1'} \\ &\quad (\text{ただし, } n \geq 2) \end{aligned}$$

②' + ①' より, $n \geq 2$ において,

$$z_{2n+2} - z_{2n} = |\alpha|^2(z_{2n} - z_{2n-2})$$

(2)

(1)で示した式より,

 z_n の表す点を P_n とすれば, ベクトルを用いて,

$$\overrightarrow{P_{2n+2}P_{2n}} = |\alpha|^2 \overrightarrow{P_{2n}P_{2n-2}}$$

とかける,

これは, 3 点 $P_{2n-2}, P_{2n}, P_{2n+2}$ が同一直線上にあることを表す,よって, 複素数平面上において, $z_{2n-2}, z_{2n}, z_{2n+2}$ が同一直線上にあるとわかる,(1)で示した式は, $n \geq 2$ について, つねに成立することから, $z_2, z_4, z_6, z_8, \dots, z_{2n}, \dots$ はすべて同一直線上といえる,同様にして, $n \geq 2$ において,

$$z_{2n+1} - z_{2n-1} = |\alpha|^2(z_{2n-1} - z_{2n-3})$$

が成立することから,

$$z_{2n+1}, z_{2n-1}, z_{2n-3}$$

は同一直線上といえ, これより,

 $z_1, z_3, z_5, \dots, z_{2n-1}, \dots$ はすべて同一直線上といえる,

(3) (1)で示した式

$$z_{2n+2} - z_{2n} = |\alpha|^2(z_{2n} - z_{2n-2}) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} z_{2n} - z_{2n-2} &= |\alpha|^2(z_{2n-2} - z_{2n-4}) \\ &= |\alpha|^4(z_{2n-4} - z_{2n-6}) \\ &= |\alpha|^6(z_{2n-6} - z_{2n-8}) \\ &\quad \vdots \\ &= |\alpha|^{2n-4}(z_4 - z_2) \end{aligned}$$

とかける,

ここで, $z_1 = 0, z_2 = 1$ より,

$$\begin{aligned} z_3 &= z_2 + \alpha(z_2 - z_1) \\ &= 1 + \alpha \\ z_4 &= z_3 + \bar{\alpha}(z_3 - z_2) \\ &= 1 + \alpha + \bar{\alpha}(1 + \alpha - 1) \\ &= 1 + \alpha + |\alpha|^2 \end{aligned}$$

よって,

$$z_{2n} - z_{2n-2} = |\alpha|^{2n-4}(\alpha + |\alpha|^2)$$

これは階差数列の漸化式を表すことから,

$$\begin{aligned} z_{2n} &= z_2 + \sum_{k=2}^n |\alpha|^{2k-4}(\alpha + |\alpha|^2) \\ &= 1 + (\alpha + |\alpha|^2) \sum_{k=2}^n |\alpha|^{2k-4} \\ &= 1 + (\alpha + |\alpha|^2) \cdot \frac{1 - |\alpha|^{2(n-1)}}{1 - |\alpha|^2} \\ &= 1 + \frac{\alpha + |\alpha|^2}{1 - |\alpha|^2} - \frac{\alpha + |\alpha|^2}{1 - |\alpha|^2} \cdot |\alpha|^{2(n-1)} \\ &= \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2} - \frac{\alpha + |\alpha|^2}{1 - |\alpha|^2} \cdot |\alpha|^{2(n-1)} \end{aligned}$$

これより,

$$\left| z_{2n} - \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2} \right| = \left| \frac{\alpha + |\alpha|^2}{1 - |\alpha|^2} \right| |\alpha|^{2(n-1)}$$

 $n \rightarrow \infty$ とすれば, $|\alpha| < 1$ に注意して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| z_{2n} - \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2} \right| = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

同様にして, (2)で用いた, $z_{2n+1} - z_{2n-1} = |\alpha|^2(z_{2n-1} - z_{2n-3})$ を利用すれば,

$$\begin{aligned} z_{2n-1} &= z_1 + \sum_{k=1}^{n-1} |\alpha|^{2k-1} \cdot (z_3 - z_1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} |\alpha|^{2k-1} \cdot (1 + \alpha) \\ &= (1 + \alpha) \cdot \frac{1 - |\alpha|^{2(n-1)}}{1 - |\alpha|^2} \\ &= \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2} - \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2} |\alpha|^{2(n-1)} \end{aligned}$$

これより,

$$\left| z_{2n-1} - \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2} \right| = \left| \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2} \right| |\alpha|^{2(n-1)}$$

 $n \rightarrow \infty$ とすれば, $|\alpha| < 1$ に注意して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| z_{2n-1} - \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2} \right| = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

①, ② より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| z_n - \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2} \right| = 0$$

ゆえに,

$$\underline{w = \frac{1 + \alpha}{1 - |\alpha|^2}}$$

と定まる,