

(1) $f'(x)=3x^2-3$ より, $A(t, f(t))$ における接線は

$$\begin{aligned} y &= (3t^2-3)(x-t) + t^3 - 3t \\ &= (3t^2-3)x - 2t^3 \quad \cdots \cdots L \end{aligned}$$

よって, C と L の交点は次の連立方程式の解.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = (3t^2-3)x - 2t^3 \end{cases} \\ x^3 - 3x &= (3t^2-3)x - 2t^3 \\ x - 3t^2x + 2t^3 &= 0 \\ (x-t)^2(x+2t) &= 0 \\ \therefore x &= t, -2t \end{aligned}$$

これより,

$$\boxed{B(-2t, -8t^3 + 6t)}$$

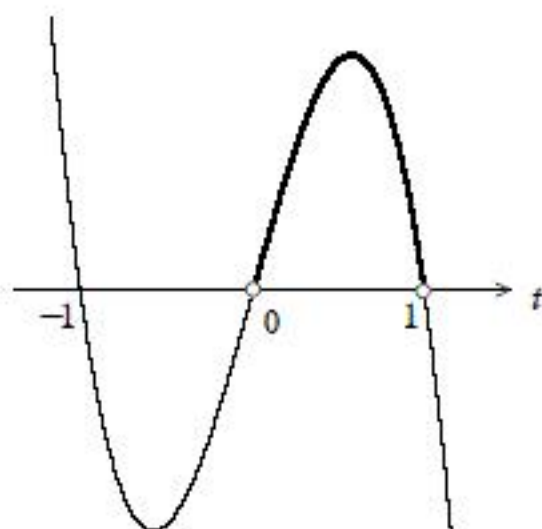
(2) A, B の y 座標の差の絶対値を $d(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} d(t) &= |(-8t^3 + 6t) - (t^3 - 3t)| \\ &= |-9t^3 + 9t| \\ &= 9|t(1-t)(1+t)| \end{aligned}$$

$0 < t < 1$ において,

$$d(t) = 9t(1-t)(t+1)$$

グラフの概形は下図太線部.



これより, $d(t)$ の極大値が最大値とわかる.

$$\begin{aligned} d(t) &= -9t^3 + 9t \\ d'(t) &= -27t^2 + 9 \end{aligned}$$

$d'(t)=0$ として,

$$t^2 = \frac{1}{3}$$

$0 < t < 1$ より,

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

このとき, 極大かつ最大となる.

$$\boxed{t = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$(1) \quad \cos \alpha = \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad 0 \leq \alpha \leq \pi \text{ より}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 1}{3\sqrt{2}} \\ &= \boxed{\frac{4 + \sqrt{2}}{6}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} t &= \sin \theta + \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$\alpha \leq \theta \leq \pi$ より

$$\alpha + \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$$

図より, $\theta = \alpha$ のとき最大,

$\theta = \pi$ のとき最小とわかる.

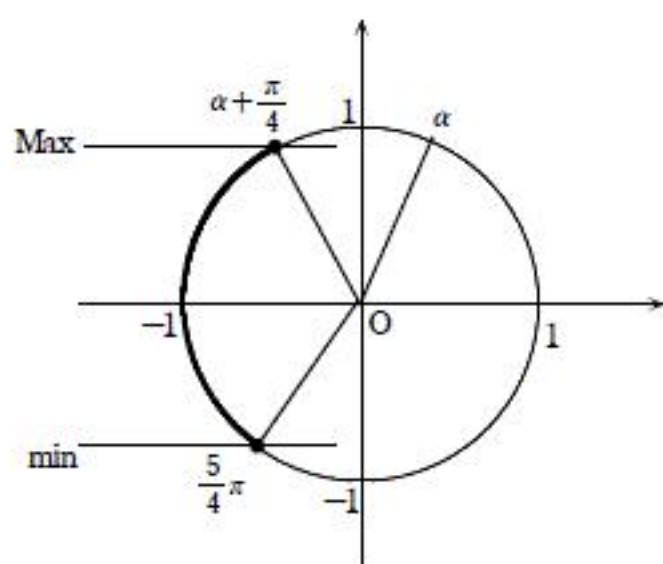
よって,

$$\sin \frac{5}{4}\pi \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{5}{4}\pi \leq t \leq \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq t \leq \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2} + 1}{3\sqrt{2}}$$

$$\boxed{-1 \leq t \leq \frac{2\sqrt{2} + 1}{3}}$$



(3)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta - (\sin \theta + \cos \theta) + 2 \\ &= t^2 - 1 - t + 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ t^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ \therefore 2 \sin \theta \cos \theta &= t^2 - 1 \end{aligned} \right)$$

よって,

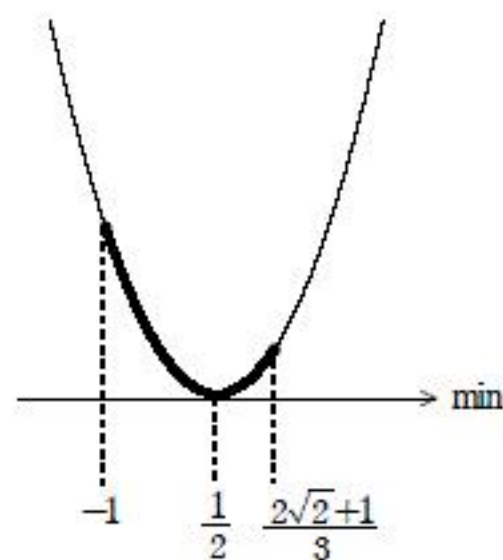
$$\boxed{f(\theta) = t^2 - t + 1}$$

(4)

$$f(\theta) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

図より,

$$\boxed{\text{最小値 } \frac{3}{4}}$$



(1)

$$D = k^2 - 4(3k - 4)$$

$$= k^2 - 12k + 16 < 0$$

$$\therefore \boxed{6 - 2\sqrt{5} < k < 6 + 2\sqrt{5}}$$

(2) $x = \alpha$ が解であることから,

$$\alpha^2 - k\alpha + 3k - 4 = 0$$

$$\alpha^2 = k\alpha - (3k - 4) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha^4 = (k\alpha - (3k - 4))^2$$

$$= k^2 \underline{\underline{\alpha^2}} - 2k(3k - 4)\alpha + (3k - 4)^2$$

$$= k^2 \left(\underline{\underline{k\alpha - (3k - 4)}} \right) - 2k(3k - 4)\alpha + (3k - 4)^2$$

①より

$$= (k^3 - 6k^2 + 8k)\alpha - k^2(3k - 4) + (3k - 4)^2$$

これが実数となるとき、 α が虚数であることから,

$$k^3 - 6k^2 + 8k = 0$$

$$k(k - 2)(k - 4) = 0$$

$$6 - 2\sqrt{5} < k < 6 + 2\sqrt{5} \text{ より}$$

$$\boxed{k = 2, 4}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OP} \\
 &= (1-t)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ s \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2(1-t) \\ 2t \\ 1-t+st \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

よって、Qを中心として、半径3の円は

$$(x-2(1-t))^2 + (y-3t)^2 + (z-(1-t+st))^2 = 9$$

(2) (1)において、 $z=0$ より、切断面の半径を r_1 とすれば

$$(x-2(1-t))^2 + (y-3t)^2 = 9 - (1-t+st)^2 = r_1^2$$

よって、

$$S_1 = \pi(9 - (1-t+st)^2)$$

(3) (1)において、 $x=0$ より、切断面の半径を r_2 とすれば

$$(y-3t)^2 + (z-(1-t+st))^2 = 9 - 4(1-t)^2 = r_2^2$$

よって、

$$S_2 = \pi(9 - 4(1-t)^2)$$

$$\begin{aligned}
 S_1 + S_2 &= \pi\{9 - (1-t+st)^2 + 9 - 4(1-t)^2\} \\
 &= \pi\{18 - ((s-1)t+1)^2 - 4(1-t)^2\} \\
 &= \pi\{(-(s-1)^2 - 4)t^2 + (-2s+10)t + 13\}
 \end{aligned}$$

$-(s-1)^2 - 4 < 0$ より、これは t の2次関数であり、
グラフは上に凸の放物線である。

軸の方程式は、

$$t = \frac{5-s}{(s-1)^2 + 4}$$

条件より、 $-3 < s < -1$ であり、この範囲において
この値は $0 < t < 1$ をみたす。

よって、 $t = \frac{5-s}{(s-1)^2 + 4}$ のとき最大値をとる。

$$\therefore t = \frac{5-s}{(s-1)^2 + 4}$$

$$(4) \quad t = \frac{1}{2} \text{ のとき } \frac{1}{2} = \frac{5-s}{(s-1)^2 + 4}$$

$$\begin{aligned}
 (s-1)^2 + 4 &= 10 - 2s \\
 s^2 &= 5
 \end{aligned}$$

$-3 < s < -1$ より、

$$s = -\sqrt{5}$$