

1

(1)

$$(1+x)e^x = 0$$

$$e^x > 0 \text{ より}$$

$$x = -1$$

(2) $f'(x) = (2+x)e^x$ より, 接点 $(t, (1+t)e^t)$ とすると, 接線は

$$\begin{aligned} y &= (2+t)e^t(x-t) + (1+t)e^t \\ &= (2+t)e^t x + (1-t-t^2)e^t \end{aligned}$$

これが原点を通るとき,

$$(1-t-t^2)e^t = 0$$

$$e^t > 0 \text{ より}$$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$\therefore t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

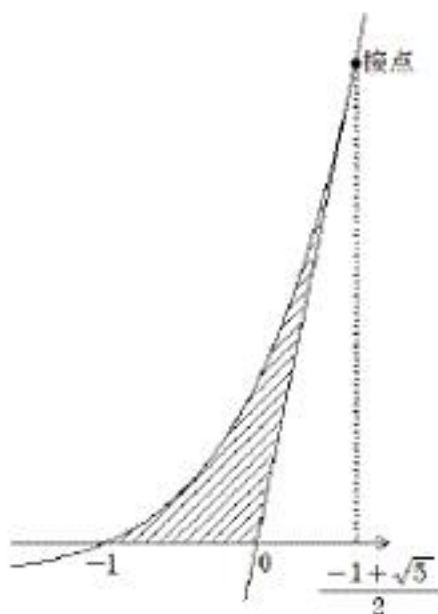
よって, 接線は

$$y = \left(2 + \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \cdot e^{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}} \cdot x$$

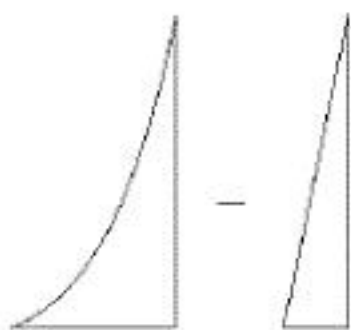
$$\therefore y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}} \cdot x \quad (\text{複号同順})$$

(3)

$$\begin{cases} y = (1+x)e^x \\ y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \cdot x \end{cases}$$



(求める面積) =



$$= \int_{-1}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (1+x)e^x dx - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{\text{底辺}} \cdot \underbrace{\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}_{\text{高さ}} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= [xe^x]_{-1}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{e} - \frac{1}{2} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \frac{1}{e}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{e}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{5}-2}{2} \cdot e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{e}}$$

- (1) 1回目に2, 5, 6がでて, Bにいき,
以後, 2, 6がでつづけて, Bにとどまる.

$$\frac{3}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}}$$

- (2) n 回後にBにいる確率を b_n , Cにいる確率を c_n とおいて
漸化式をつくる.

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \underbrace{c_n \cdot \frac{4}{6}}_{\substack{\text{Cにいて} \\ 3, 4 \text{ 以外} \\ \text{がでる}}} + \underbrace{b_n \cdot \frac{3}{6}}_{\substack{\text{Bにいて} \\ 1, 3, 5 \text{ がでる}}} \\ &= \frac{2}{3}c_n + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (\because (1) \text{より}) \end{aligned}$$

両辺 $\div \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{c_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{c_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

ここで, $x_n = \frac{c_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ とおくと, $x_1 = \frac{c_1}{\frac{1}{3}} = 1$

よって,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{9}{4} \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

変形して

$$x_{n+1} + \frac{9}{4} = 2\left(x_n + \frac{9}{4}\right)$$

$$x_n + \frac{9}{4} = \left(1 + \frac{9}{4}\right) \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore x_n = \frac{13}{4} \cdot 2^{n-1} - \frac{9}{4}$$

$$\frac{c_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{13}{8} \cdot 2^n - \frac{9}{4}$$

$$\therefore \boxed{c_n = \frac{13}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

- (3) $n \geq 2$ のとき

$n-1$ 回目にBにいて, n 回目に4がでるか

$n-1$ 回目にCにいて, n 回目に3, 4がでればよい.

求める確率を d_n とすれば

$$\begin{aligned} d_n &= b_{n-1} \cdot \frac{1}{6} + c_{n-1} \cdot \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{13}{24} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{13}{24} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき

1回目に4がでればよい.

よって,

$$\boxed{\begin{cases} d_1 = \frac{1}{6} \\ d_n = \frac{13}{24} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases} \quad (n \geq 2)}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 D &= k^2 - 4(3k - 4) \\
 &= k^2 - 12k + 16 < 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{6 - 2\sqrt{5} < k < 6 + 2\sqrt{5}}$$

(2) $x = \alpha$ が解であることから,

$$\alpha^2 - k\alpha + 3k - 4 = 0$$

$$\alpha^2 = k\alpha - (3k - 4) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha^4 &= (k\alpha - (3k - 4))^2 \\
 &= k^2 \underline{\underline{\alpha^2}} - 2k(3k - 4)\alpha + (3k - 4)^2 \\
 &= k^2 \left(\underline{\underline{k\alpha - (3k - 4)}} \right) - 2k(3k - 4)\alpha + (3k - 4)^2 \\
 &\quad \quad \quad \textcircled{1} \text{より} \\
 &= (k^3 - 6k^2 + 8k)\alpha - k^2(3k - 4) + (3k - 4)^2
 \end{aligned}$$

これが実数となるとき, α が虚数であることから,

$$k^3 - 6k^2 + 8k = 0$$

$$k(k - 2)(k - 4) = 0$$

$$6 - 2\sqrt{5} < k < 6 + 2\sqrt{5} \text{ より}$$

$$\boxed{k = 2, 4}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OP} \\
 &= (1-t)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ s \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2(1-t) \\ 2t \\ 1-t+st \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

よって、Q を中心として、半径 3 の円は

$$\boxed{(x-2(1-t))^2 + (y-3t)^2 + (z-(1-t+st))^2 = 9}$$

(2) (1)において、 $z=0$ より、切断面の半径を r_1 とすれば

$$(x-2(1-t))^2 + (y-3t)^2 = 9 - (1-t+st)^2 = r_1^2$$

よって、

$$\boxed{S_1 = \pi(9 - (1-t+st)^2)}$$

(3) (1)において、 $x=0$ より、切断面の半径を r_2 とすれば

$$(y-3t)^2 + (z-(1-t+st))^2 = 9 - 4(1-t)^2 = r_2^2$$

よって、

$$S_2 = \pi(9 - 4(1-t)^2)$$

$$\begin{aligned}
 S_1 + S_2 &= \pi\{9 - (1-t+st)^2 + 9 - 4(1-t)^2\} \\
 &= \pi\{18 - ((s-1)t+1)^2 - 4(1-t)^2\} \\
 &= \pi\{(-(s-1)^2 - 4)t^2 + (-2s+10)t + 13\}
 \end{aligned}$$

$-(s-1)^2 - 4 < 0$ より、これは t の 2 次関数であり、
グラフは上に凸の放物線である。

軸の方程式は、

$$t = \frac{5-s}{(s-1)^2 + 4}$$

条件より、 $-3 < s < -1$ であり、この範囲において
この値は $0 < t < 1$ をみたす。

よって、 $t = \frac{5-s}{(s-1)^2 + 4}$ のとき最大値をとる。

$$\therefore \boxed{t = \frac{5-s}{(s-1)^2 + 4}}$$

$$(4) \quad t = \frac{1}{2} \text{ のとき } \frac{1}{2} = \frac{5-s}{(s-1)^2 + 4}$$

$$\begin{aligned}
 (s-1)^2 + 4 &= 10 - 2s \\
 s^2 &= 5
 \end{aligned}$$

$-3 < s < -1$ より、

$$\boxed{s = -\sqrt{5}}$$