

- (1) $0 < x < 1$ のとき、二等辺三角形の面積 S について、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{1-x^2} \\ &= x\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

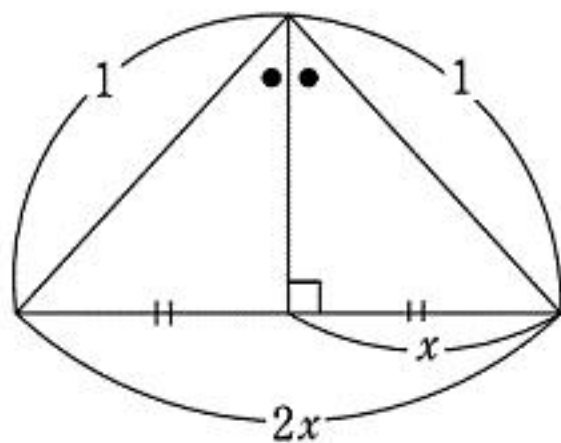
また、

$$\begin{aligned} S &= \frac{r}{2}(1+1+2x) \\ &= r(1+x) \\ S &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 2x}{4R} = \frac{x}{2R} \end{aligned}$$

より、

$$r(1+x) = x\sqrt{1-x^2} \text{ から, } r = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}$$

$$\frac{x}{2R} = x\sqrt{1-x^2} \text{ から, } R = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$



- (2)

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} &= \frac{\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}}{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2x(1-x^2)}{1+x} \\ &= \frac{2x(1-x)\cancel{(1+x)}}{\cancel{(1+x)}} \\ &= -2x^2 + 2x \\ &= -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって $x = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$ をとる.

(1)

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{1+b}{a} \\
x_4 &= \frac{1+x_3}{x_2} = \frac{1+\frac{1+b}{a}}{b} = \frac{a+b+1}{ab} \\
x_5 &= \frac{1+x_4}{x_3} = \frac{1+\frac{a+b+1}{ab}}{\frac{1+b}{a}} \\
&= \frac{ab+a+b+1}{b(1+b)} \\
&= \frac{(1+a) \cdot \cancel{(1+b)}}{b \cdot \cancel{(1+b)}} \\
&= \frac{1+a}{b} \\
x_6 &= \frac{1+x_5}{x_4} = \frac{1+\frac{1+a}{b}}{\frac{a+b+1}{ab}} \\
&= \frac{ab+a(a+1)}{a+b+1} \\
&= \frac{\cancel{(a+b+1)} \cdot a}{\cancel{a+b+1}} \\
&= a \\
x_7 &= \frac{1+x_6}{x_5} = \frac{1+a}{\frac{a+1}{b}} \\
&= \cancel{(1+a)} \cdot \frac{b}{\cancel{a+1}} \\
&= b
\end{aligned}$$

(2) (1) よりこの数列は,

$$a, b, \frac{1+b}{a}, \frac{a+b+1}{ab}, \frac{1+a}{b}$$

の循環数列とわかる.

 $a=2$ のとき,

$$2, b, \frac{1+b}{2}, \frac{b+3}{2b}, \frac{3}{b}$$

 $\frac{3}{b}$ が自然数となるためには $b=1$ または 3 $b=1$ のとき,

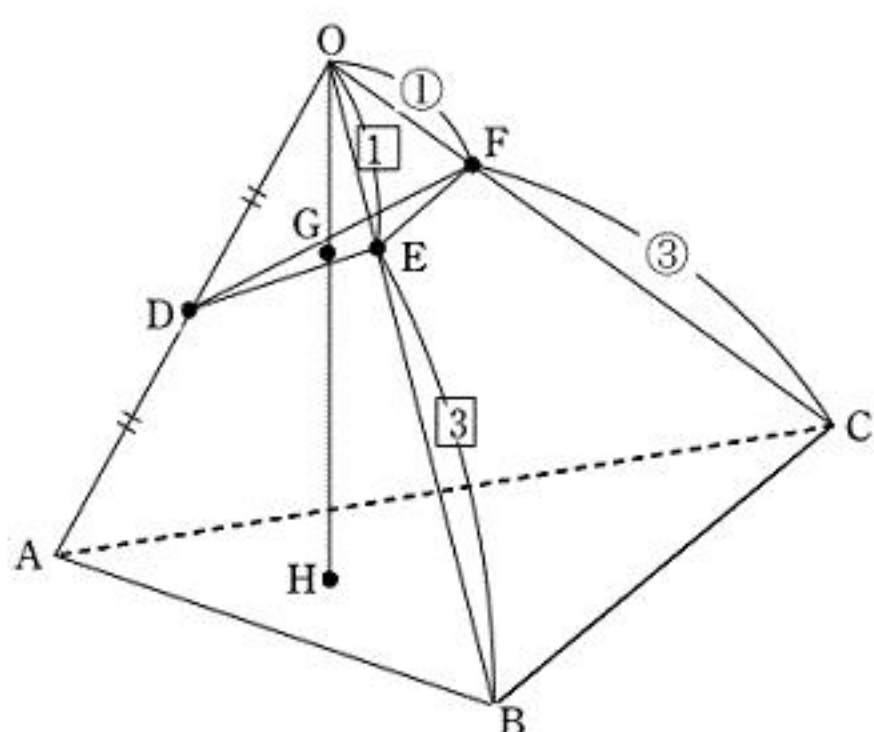
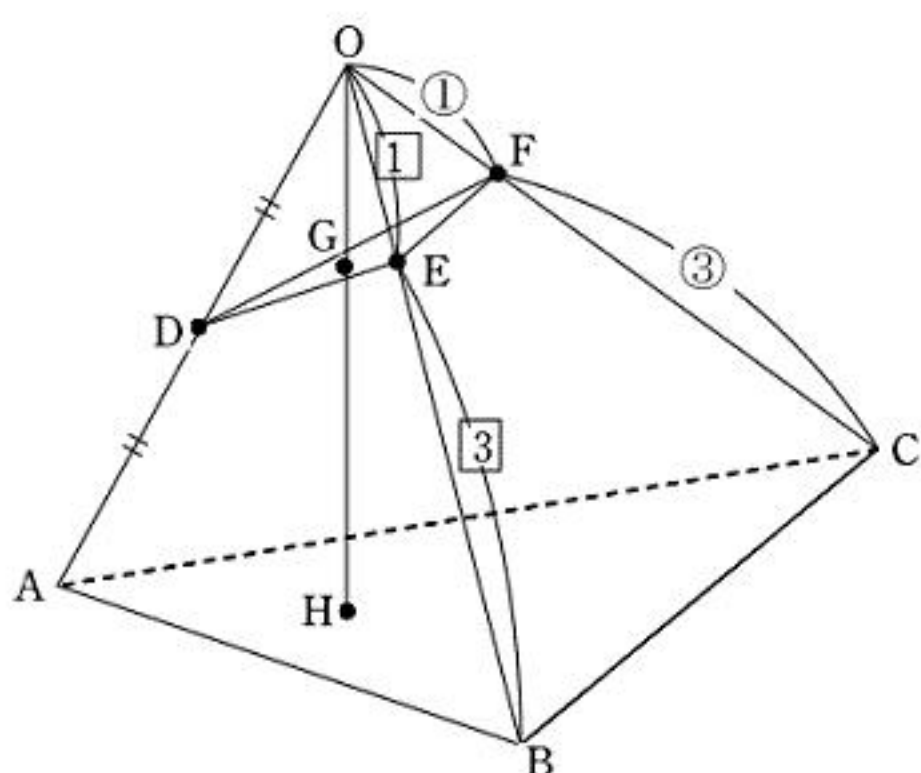
$$2, 1, \frac{1+1}{2}, \frac{1+3}{2 \cdot 1}, \frac{3}{1}$$

つまり $2, 1, 1, 2, 3$ となり成立. $b=3$ のとき,

$$2, 3, \frac{1+3}{2}, \frac{3+3}{2 \cdot 3}, \frac{3}{3}$$

つまり $2, 3, 2, 1, 1$ となり成立.ゆえに $b=1, 3$

$$\begin{aligned}\vec{OG} &= \frac{1}{3}\vec{OD} + \frac{1}{3}\vec{OE} + \frac{1}{3}\vec{OF} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\vec{OC} \\ \vec{OG} &= \frac{1}{6}\vec{OA} + \frac{1}{12}\vec{OB} + \frac{1}{12}\vec{OC}\end{aligned}$$


$$\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OG} \text{ と表せる.}$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{k}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{12}\overrightarrow{OB} + \frac{k}{12}\overrightarrow{OC}$$

$$\frac{k}{6} + \frac{k}{12} + \frac{k}{12} = 1$$

ゆえに, $k=3$

よって,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$$

$$|\overrightarrow{AH}|^2 = \left| -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} |\overrightarrow{OA}|^2 + \frac{1}{16} |\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{1}{16} |\overrightarrow{OC}|^2 - \frac{1}{4} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{8} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \frac{1}{4} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$|\vec{OA}|^2 = |\vec{OB}|^2 = |\vec{OC}|^2 = 1$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

よって,

$$\begin{aligned} |\vec{AH}|^2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

以上より, $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(1) 連立して,

$$2x^2 + 4x + 3 = -2ax - a^2$$

$$2x^2 + 2(2+a)x + (a^2 + 3) = 0$$

この方程式の判別式を D とおくと,

これが異なる 2 つの実数解を持つので, $D > 0$

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (2+a)^2 - 2(a^2 + 3) \\ &= -a^2 + 4a - 2 > 0\end{aligned}$$

つまり,

$$a^2 - 4a + 2 < 0$$

よって,

$$2 - \sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2}$$

(2) 2 交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと,

$$\begin{aligned}S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-2ax - a^2) - (2x^2 + 4x + 3)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-2x^2 - 2(2+a)x - (3+a^2)\} dx \\ &= -\frac{2}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3.\end{aligned}$$

ここで, α, β について,

$$2x^2 + 2(2+a)x + (3+a^2) = 0$$

の 2 解より, 解と係数の関係から,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2 - a \\ \alpha\beta = \frac{3+a^2}{2} \end{cases}$$

よって,

$$\begin{aligned}(\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-2 - a)^2 - 4 \cdot \frac{3+a^2}{2} \\ &= -a^2 + 4a - 2 \\ &= -(a-2)^2 + 2\end{aligned}$$

$\beta - \alpha > 0$ であるから, $\beta - \alpha = \sqrt{-(a-2)^2 + 2}$

これより $\beta - \alpha$ は, $a = 2$ のとき最大値 $\sqrt{2}$

ゆえに S の最大値は $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($a = 2$)