

1

(1)

2人でじゃんけんをして

Aが勝つ確率 $\frac{1}{3}$, Bが勝つ確率 $\frac{1}{3}$, あいことなる確率 $\frac{1}{3}$ であるから,

$a_3 = 3$ のとき

(i) 1勝1敗1分

$$\begin{array}{c} \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \underline{3!} = \frac{2}{9} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \text{勝敗分の順番} \\ \boxed{\bigcirc \mid \times \mid \triangle} \end{array}$$

(ii) 0勝0敗3分

$$\begin{array}{c} \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \boxed{\triangle \mid \triangle \mid \triangle} \end{array}$$

よって, (i), (ii) は排反事象なので,

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \boxed{\frac{7}{27}}$$

(2) $a_5 = 5$ のとき

(i) 2勝2敗1分

$$\begin{array}{c} \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{5!}{\underline{2! \times 2!}} = \frac{30}{243} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \text{勝敗分の順番} \\ \boxed{\bigcirc \mid \bigcirc \mid \times \mid \times \mid \triangle} \end{array}$$

(ii) 1勝1敗3分

$$\begin{array}{c} \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{5!}{\underline{3!}} = \frac{20}{243} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \text{勝敗分の順番} \\ \boxed{\bigcirc \mid \times \mid \triangle \mid \triangle \mid \triangle} \end{array}$$

(iii) 0勝0敗5分

$$\begin{array}{c} \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{243} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \boxed{\triangle \mid \triangle \mid \triangle \mid \triangle \mid \triangle} \end{array}$$

よって, (i), (ii), (iii) は排反事象なので

$$\frac{30}{243} + \frac{20}{243} + \frac{1}{243} = \frac{51}{243} = \boxed{\frac{17}{81}}$$

(3) $a_5 \geq b_5$ は $a_5 = b_5$ または $a_5 > b_5$

$a_5 = b_5$ のとき, じゃんけんの勝敗は

2勝2敗1分, 1勝1敗3分, 0勝0敗5分のいずれかであり,

(2)より, $a_5 = b_5 = 5$ のときと等しい.

よって, この確率は $\frac{17}{81}$

次に $a_5 > b_5$ について, じゃんけんの対等性から

$a_5 < b_5$ の確率と等しい.

$$\begin{array}{l} a_5 = b_5 \Big] \text{ 確率 } \frac{17}{81} \\ a_5 > b_5 \Big] \text{ 確率 } 1 - \frac{17}{81} = \frac{64}{81} \\ a_5 < b_5 \Big] \end{array}$$

よって, $a_5 > b_5$ の確率は $\frac{64}{81} \div 2 = \frac{32}{81}$

以上より, $a_5 \geq b_5$ の確率は, $a_5 = b_5$ の事象と, $a_5 > b_5$ の事象は排反事象なので,

$$\frac{17}{81} + \frac{32}{81} = \boxed{\frac{49}{81}}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{1+b}{a} \\
 x_4 &= \frac{1+x_3}{x_2} = \frac{1+\frac{1+b}{a}}{b} = \frac{a+b+1}{ab} \\
 x_5 &= \frac{1+x_4}{x_3} = \frac{1+\frac{a+b+1}{ab}}{\frac{1+b}{a}} \\
 &= \frac{ab+a+b+1}{b(1+b)} \quad \begin{array}{l} \text{分母子ともに} \\ ab \text{ 倍} \end{array} \\
 &= \frac{(1+a)(1+b)}{b(1+b)} \\
 &= \frac{1+a}{b} \\
 x_6 &= \frac{1+x_5}{x_4} = \frac{1+\frac{1+a}{b}}{\frac{a+b+1}{ab}} \quad \begin{array}{l} \text{分母子ともに} \\ ab \text{ 倍} \end{array} \\
 &= \frac{ab+a(a+1)}{a+b+1} \\
 &= \frac{a(a+b+1)}{a+b+1} \\
 &= a \\
 x_7 &= \frac{1+x_6}{x_5} = \frac{1+a}{\frac{a+1}{b}} \\
 &= (1+a) \cdot \frac{b}{1+a} \\
 &= b
 \end{aligned}$$

以上より, $x_6 = \boxed{a}$ $x_7 = \boxed{b}$

(2) (1) の結果より, この数列は

$$a, b, \frac{1+b}{a}, \frac{a+b+1}{ab}, \frac{1+a}{b}$$

の循環数列とわかる.

これらがすべて自然数より,

$$\begin{cases}
 a \geq 1 & \dots\dots ① \\
 b \geq 1 & \dots\dots ② \\
 \frac{1+b}{a} \geq 1 & \rightarrow 1+b \geq a \text{ より, } a-b \leq 1 & \dots\dots ③ \\
 \frac{a+b+1}{ab} \geq 1 & \rightarrow a+b+1 \geq ab \text{ より, } ab-a-b \leq 1 \\
 & (a-1)(b-1) \leq 2 & \dots\dots ④ \\
 \frac{1+a}{b} \geq 1 & \rightarrow 1+a \geq b \text{ より, } a-b \geq -1 & \dots\dots ⑤
 \end{cases}$$

が必要.

①～⑤より, $a-1$ と $b-1$ の組み合わせは次の 6 通り.

$a-1$	2	1	1	0	1	0
$b-1$	1	2	1	1	0	0

よって,

$$(a, b) = (3, 2), (2, 3), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 1)$$

これらの候補が, $\frac{1+b}{a}, \frac{a+b+1}{ab}, \frac{1+a}{b}$ を自然数にするか吟味すれば

題意をみたす (a, b) の組は,

$$\boxed{(3, 2), (2, 3), (2, 1), (1, 2), (1, 1)}$$

$$(1) \left(\begin{array}{l} \text{同一直線上のとき } w = kz \text{ であるから} \\ \frac{w}{z} = k \text{ (実数) をいえばよい.} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{w}{z}\right)} &= \frac{\bar{w}}{\bar{z}} \times \frac{z}{z} \\ &= \frac{\bar{wz}}{\bar{z}z} \\ &= \frac{\bar{z}w}{\bar{z}z} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ } \\ \nearrow \bar{z}w = z\bar{w} \text{ より} \end{array} \right) \\ &= \frac{w}{z} \end{aligned}$$

$$\text{これより, } \frac{w}{z} = (\text{実数})$$

ゆえに, $0, z, w$ は同一直線上にとれる.

$$(2) \quad |z-1|=1 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} |z-1|^2 &= (z-1)(\bar{z}-1) \\ 1^2 &= z\bar{z} - (z+\bar{z}) + 1 \\ 1 &= |z|^2 - (z+\bar{z}) + 1 \\ \therefore |z|^2 &= z+\bar{z} \end{aligned}$$

ここで, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと,

$$r^2 = 2r\cos\theta$$

$$r \neq 0 \text{ より, } r = 2\cos\theta$$

$$\text{よって, } \boxed{z = 2\cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

また, (1) より, $w = kz$ とおける.

$$\text{条件より, } |z - kz| = 2$$

$$|z| |1-k| = 2$$

$$|z| = |2\cos\theta| \text{ より}$$

$$\begin{aligned} |1-k| &= \frac{1}{|\cos\theta|} \\ 1-k &= \pm \frac{1}{\cos\theta} \\ k &= 1 \pm \frac{1}{\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \boxed{w = 2(\cos\theta \pm 1)(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$(3) \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \cos\theta > 0 \text{ であるから, } |\cos\theta| = \cos\theta \text{ より,}$$

$$w = (2\cos\theta \pm 2)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

w の虚部

$$\begin{aligned} \text{I}_m(w) &= (2\cos\theta \pm 2)\sin\theta \\ &= 2\sin\theta\cos\theta \pm 2\sin\theta \end{aligned}$$

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ において, $\sin\theta \geq 0, \cos\theta > 0$ より, 最大値については

$$2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta$$

を考えればよい. これを $f(\theta)$ とおく.

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta \\ &= \sin 2\theta + 2\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2\cos 2\theta + 2\cos\theta \\ &= 2(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) \\ &= 2(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) \end{aligned}$$

$$f'(\theta) = 0 \text{ として, } \cos\theta = \frac{1}{2}, -1$$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

増減表をかくと,

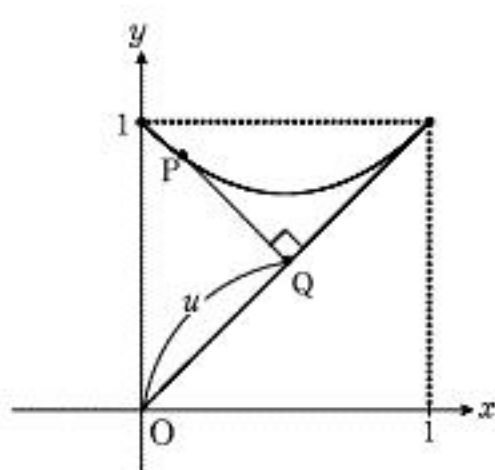
θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき, 最大値 } \sin \frac{2}{3}\pi + 2\sin \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \text{ をとる.}$$

$$C \text{ について } y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$L \text{ と } C \text{ の共有点について, } x^2 - x + 1 = x \text{ より, } (x-1)^2 = 0$$

よって, $x=1$ で接する.



$$(1) \quad Q(s, s) \text{ とおくと, } OQ = \sqrt{2}s$$

$PQ \perp OQ$ より,

$$(\text{PQ の傾き}) = \frac{t^2 - t + 1 - s}{t - s} = -1$$

$$t^2 - t + 1 - s = -t + s$$

$$t^2 + 1 = 2s$$

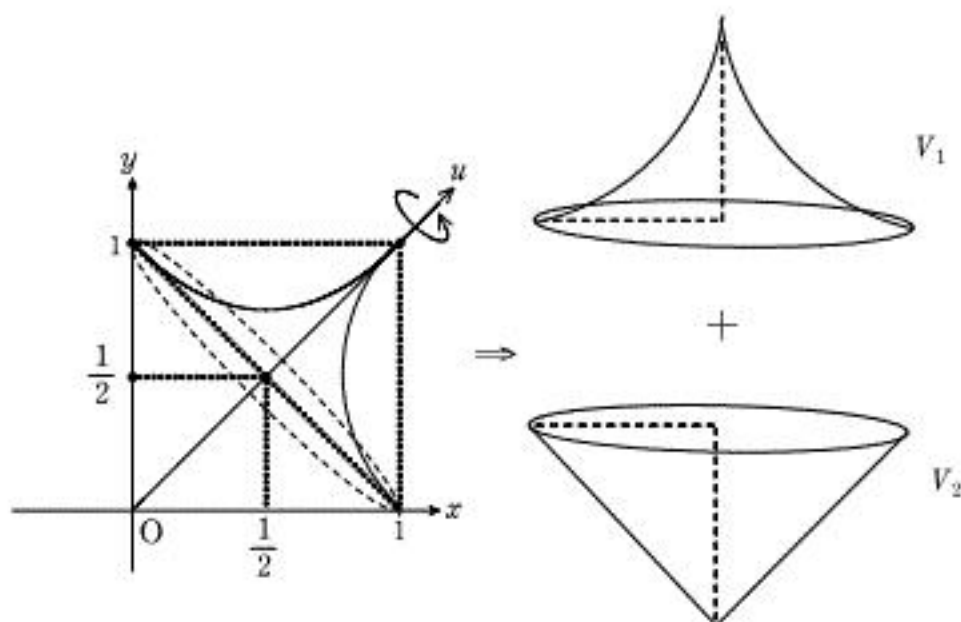
$$\therefore s = \frac{t^2 + 1}{2}$$

$$\text{よって, } OQ = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(t^2 + 1)}$$

$$(2) \quad \text{点 } P(t, t^2 - t + 1) \text{ と, 直線 } L, x - y = 0 \text{ の距離 } PQ \text{ は}$$

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{|t - (t^2 - t + 1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|-t^2 + 2t - 1|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|(t-1)^2|}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

(3)



回転体の放物線の回転体 V_1 と y 軸の回転体 V_2 に分けられる.

V_1 について

$y = x$ を u 軸とする.

u 軸のまわりの回転体の体積 V_1 は

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \pi \cdot (PQ)^2 du \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \pi \cdot \left(\frac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}\right)^2 du \end{aligned}$$

とかける.

$$\text{いま, } u = \frac{\sqrt{2}}{2}(t^2 + 1) \text{ より,}$$

$$\left. \begin{array}{l} u \\ t \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sqrt{2} \\ 0 \rightarrow 1 \end{array} \quad \frac{du}{dt} = \sqrt{2}t$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^1 \frac{(t-1)^4}{2} \cdot \sqrt{2}t dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \int_0^1 t(t-1)^4 dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \cdot \frac{1}{30} (1-0)^5 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{60} \pi \end{aligned}$$

V_2 について

半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 高さ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円錐より,

$$V_2 = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \pi$$

以上より,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\sqrt{2}}{60} \pi + \frac{\sqrt{2}}{12} \pi = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{10} \pi}$$

