

[1]

(1)

a, b は整数であり, $ab = 21$ であるので,
 $(a, b) = (1, 21), (3, 7), (7, 3), (21, 1)$

の 4 通りである。また, $\triangle ABC$ において, 余弦定理より,

$$\begin{aligned} BC^2 &= CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB \cdot \cos \angle BAC \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - bc \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。以下, (a, b) によって場合分けをする。

[1] $(a, b) = (1, 21)$ のとき

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \textcircled{1} \text{ より,} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - bc \\ \Leftrightarrow 1^2 &= 21^2 + c^2 - 21c \\ \Leftrightarrow c^2 - 21c + 440 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(c - \frac{21}{2}\right)^2 + \frac{1319}{4} &= 0 \end{aligned}$$

である。このとき, (左辺) >0 であるので, この方程式を満たす整数 c は存在しない。

[2] $(a, b) = (3, 7)$ のとき

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \textcircled{1} \text{ より,} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - bc \\ \Leftrightarrow 3^2 &= 7^2 + c^2 - 7c \\ \Leftrightarrow c^2 - 7c + 40 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(c - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{111}{4} &= 0 \end{aligned}$$

である。このとき, (左辺) >0 であるので, この方程式を満たす整数 c は存在しない。

[3] $(a, b) = (7, 3)$ のとき

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \textcircled{1} \text{ より,} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - bc \\ \Leftrightarrow 7^2 &= 3^2 + c^2 - 3c \\ \Leftrightarrow c^2 - 3c - 40 &= 0 \\ \Leftrightarrow (c+5)(c-8) &= 0 \end{aligned}$$

である。このとき, c は正の整数であるので,

$$c = 8$$

である。よって,

$$(a, b, c) = (7, 3, 8)$$

である。このとき $7-3 < 8 < 7+3$ より, $\triangle ABC$ は成立する。

[4] $(a, b) = (21, 1)$ のとき

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \textcircled{1} \text{ より,} \\ a^2 &= b^2 + c^2 - bc \\ \Leftrightarrow 21^2 &= 1^2 + c^2 - 1 \cdot c \\ \Leftrightarrow c^2 - c - 440 &= 0 \end{aligned}$$

である。この方程式を解くと,

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{1761}}{2}$$

となるが, c は正の整数であるので, この方程式を満たす c は存在しない。

以上, [1], [2], [3], [4] より,

$$(a, b, c) = (7, 3, 8)$$

である。

(答) $(a, b, c) = (7, 3, 8)$

(2)

与式より,

$$\begin{aligned} a+b+c &= \frac{bc}{2} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{bc}{2} - b - c \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であるので, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より,

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - bc \\ \Leftrightarrow \left(\frac{bc}{2} - b - c\right)^2 &= b^2 + c^2 - bc \\ \Leftrightarrow b^2c^2 - 4b^2c - 4bc^2 + 12bc &= 0 \\ \Leftrightarrow bc(bc - 4b - 4c + 12) &= 0 \end{aligned}$$

である。 $b \neq 0, c \neq 0$ であるので,

$$bc - 4b - 4c + 12 = 0$$

である。よって,

$$\begin{aligned} bc - 4b - 4c + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b-4)(c-4) &= 4 \end{aligned}$$

である。このとき, $b > 0, c > 0$ より, $b-4, c-4$ は -4 より大きい整数であるので,

$$\begin{aligned} (b-4, c-4) &= (-2, -2), (1, 4), (2, 2), (4, 1) \\ \Leftrightarrow (b, c) &= (2, 2), (5, 8), (6, 6), (8, 5) \end{aligned}$$

である。以下, (b, c) によって場合分けをする。

[1] $(b, c) = (2, 2)$ のとき

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \textcircled{2} \text{ より,} \\ a &= \frac{bc}{2} - b - c \\ &= \frac{2 \cdot 2}{2} - 2 - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

となるが, $a > 0$ であるので, 不適である。

[2] $(b, c) = (5, 8)$ のとき

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \textcircled{2} \text{ より,} \\ a &= \frac{bc}{2} - b - c \\ &= \frac{5 \cdot 8}{2} - 5 - 8 \\ &= 7 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$(a, b, c) = (7, 5, 8)$$

である。

[3] $(b, c) = (6, 6)$ のとき

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \textcircled{2} \text{ より,} \\ a &= \frac{bc}{2} - b - c \\ &= \frac{6 \cdot 6}{2} - 6 - 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$(a, b, c) = (6, 6, 6)$$

である。

[4] $(b, c) = (8, 5)$ のとき

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \textcircled{2} \text{ より,} \\ a &= \frac{bc}{2} - b - c \\ &= \frac{8 \cdot 5}{2} - 8 - 5 \\ &= 7 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$(a, b, c) = (7, 8, 5)$$

である。

以上, [1], [2], [3], [4] より,

$$(a, b, c) = (7, 5, 8), (6, 6, 6), (7, 8, 5)$$

である。これらの (a, b, c) に対して $\triangle ABC$ は成立する。

(答) $(a, b, c) = (7, 5, 8), (6, 6, 6), (7, 8, 5)$

[2]

(1)

$f(t)=e^t-\frac{t^2}{2}$ とする。よって、

$$\begin{cases} f'(t)=e^t-t \\ f''(t)=e^t-1 \end{cases}$$

である。 $t \geq 0$ において $e^t \geq 1$ であるので、

$$f''(t) \geq 0$$

である。よって $f'(t)$ は $t \geq 0$ において単調増加であり、 $f'(0)=1$ であるので、 $f'(t) \geq 1 > 0$ となる。同様に、 $f(t)$ は $t \geq 0$ において単調増加であり、 $f(0)=1$ であるので、 $f(t) \geq 1 > 0$ となる。以上より、

$$\begin{aligned} f(t) &> 0 \\ \Leftrightarrow e^t - \frac{t^2}{2} &> 0 \\ \therefore e^t &> \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

であることが示された。

(証明終)

(2)

$y=(x^2-1)e^{-x^2}$ のグラフを考える。 $g(x)=(x^2-1)e^{-x^2}$ とする。 $g(x)$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x \cdot e^{-x^2} + (x^2-1) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} \\ &= -2x(x^2-2)e^{-x^2} \end{aligned}$$

である。よって、 $g(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

極大値と極小値を求めると、

$$\begin{aligned} g(-\sqrt{2}) &= g(\sqrt{2}) = \frac{1}{e^2} \\ g(0) &= -1 \end{aligned}$$

である。また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ を考える。 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2-1)e^{-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2e^{-x^2} - e^{-x^2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2e^{-x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2e^{-x^2} - 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2e^{-x^2} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2e^{-x^2}$ を考える。(1)より、 $x \geq 0$ において、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{x^2}{2} < e^x \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x^2e^{-x^2} < 2e^{-x^2+x} \end{aligned}$$

である。 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-x^2+x} = 0$ であるので、はさみうちの原理より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2e^{-x^2} = 0$$

である。よって、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

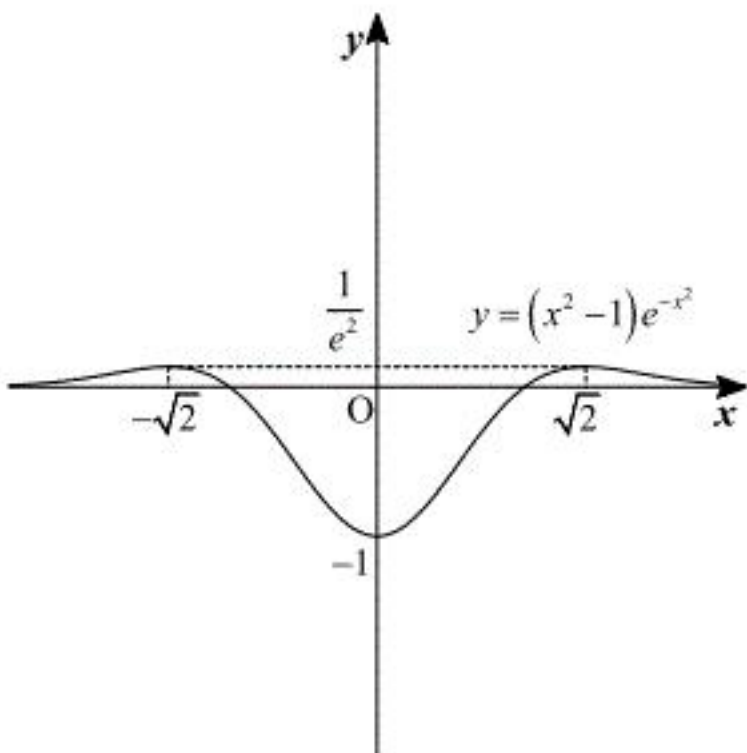
である。また、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ を考える。 $x \rightarrow -\infty$ のとき、 $x=-y$ とおくと $y \rightarrow \infty$ であるので、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2-1)e^{-x^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \{(-y)^2-1\}e^{-(-y)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} (y^2-1)e^{-y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) \end{aligned}$$

である。よって、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。したがって、増減表より、 $y=(x^2-1)e^{-x^2}$ のグラフは以下の通りである。



したがって、直線 $y=c$ と関数 $y=(x^2-1)e^{-x^2}$ のグラフとの共有点の個数は、

$$\begin{cases} c < -1, \frac{1}{e^2} < c \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ c = -1 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ -1 < c \leq 0, c = \frac{1}{e^2} \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \\ 0 < c < \frac{1}{e^2} \text{ のとき, } 4 \text{ 個} \end{cases}$$

である。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \qquad \qquad \qquad & \begin{cases} c < -1, \frac{1}{e^2} < c \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ c = -1 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ -1 < c \leq 0, c = \frac{1}{e^2} \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \\ 0 < c < \frac{1}{e^2} \text{ のとき, } 4 \text{ 個} \end{cases} \end{aligned}$$

【3】

(1)

Z_1 の値を縦に、 Z_1' の値を横に取った、 Z_1, Z_1' の値による X_1 の値の表は以下の通りである。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	6
2	3	4	5	6	6	6
3	4	5	6	6	6	6
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

表より、 X_1 のとりうる値は、2, 3, 4, 5, 6である。それぞれの確率を求めると、 $X_1=2$ である確率は、

$$\frac{1}{36}$$

である。 $X_1=3$ である確率は、

$$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

である。 $X_1=4$ である確率は、

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

である。 $X_1=5$ である確率は、

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

である。 $X_1=6$ である確率は、

$$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

である。以上より、 X_1 の確率分布の表は以下の通りである。

X_1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

(答) 前表

(2)

$Z_1=1$ である確率は $\frac{1}{6}$ である。 $Z_1=1$ かつ $X_1+X_2=6$ である確率を考える。 X_1, X_2 のとりうる値は2, 3, 4, 5, 6であるので、 $X_1+X_2=6$ のとき、

$$(X_1, X_2)=(2, 4), (3, 3), (4, 2)$$

である。以下、 (X_1, X_2) によって場合分けをする。

[1] $(X_1, X_2)=(2, 4)$ のとき

このとき、 $Z_1=1$ かつ $X_1=2$ である確率は、(1)の表より、 $\frac{1}{36}$ である。また、 X_2 がとりうる値とそれぞれの確率は X_1 がとりうる値とそれぞれの確率と等しいので、 $X_2=4$ である確率は、(1)より $\frac{1}{4}$ である。 X_1 がある値をとる事象と X_2 がある値をとる事象は独立であるから、 $Z_1=1$ かつ $(X_1, X_2)=(2, 4)$ である確率は、

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{144}$$

である。

[2] $(X_1, X_2)=(3, 3)$ のとき

このとき、 $Z_1=1$ かつ $X_1=3$ である確率は、(1)の表より $\frac{1}{36}$ である。また、 $X_2=3$ である確率は、(1)より $\frac{1}{18}$ である。したがって、 $Z_1=1$ かつ $(X_1, X_2)=(3, 3)$ である確率は、

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{648}$$

である。

[3] $(X_1, X_2)=(4, 2)$ のとき

このとき、 $Z_1=1$ かつ $X_1=4$ である確率は、(1)の表より $\frac{1}{36}$ である。また、 $X_2=2$ である確率は、(1)より $\frac{1}{36}$ である。したがって、 $Z_1=1$ かつ $(X_1, X_2)=(4, 2)$ である確率は、

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{1296}$$

である。

以上、[1], [2], [3]より、 $Z_1=1$ かつ $X_1+X_2=6$ である確率は、

$$\frac{1}{144} + \frac{1}{648} + \frac{1}{1296} = \frac{1}{108}$$

である。以上より、 $Z_1=1$ のとき、 $X_1+X_2=6$ である条件付き確率は、

$$\frac{\frac{1}{108}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{18}$$

である。

(答) $\frac{1}{18}$

(3)

$X_1+X_2=6$ である確率を考える。 X_1, X_2 のとりうる値は、2, 3, 4, 5, 6であるので、 $X_1+X_2=6$ のとき、

$$(X_1, X_2)=(2, 4), (3, 3), (4, 2)$$

である。以下、 (X_1, X_2) によって場合分けをする。

[1] $(X_1, X_2)=(2, 4)$ のとき

このとき、 $X_1=2$ である確率は、(1)より $\frac{1}{36}$ である。また、 $X_2=4$ である確率は、(1)より $\frac{1}{4}$ である。したがって、 $(X_1, X_2)=(2, 4)$ である確率は、

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{144}$$

である。

[2] $(X_1, X_2)=(3, 3)$ のとき

このとき、 $X_1=3$ である確率は、(1)より $\frac{1}{18}$ である。また、 $X_2=3$ である確率は、(1)より $\frac{1}{18}$ である。したがって、 $(X_1, X_2)=(3, 3)$ である確率は、

$$\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{324}$$

である。

[3] $(X_1, X_2)=(4, 2)$ のとき

このとき、 $X_1=4$ である確率は、(1)より $\frac{1}{4}$ である。また、 $X_2=2$ である確率は、(1)より $\frac{1}{36}$ である。したがって、 $(X_1, X_2)=(4, 2)$ である確率は、

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{144}$$

である。

以上、[1], [2], [3]より、 $X_1+X_2=6$ である確率は、

$$\frac{1}{144} + \frac{1}{324} + \frac{1}{144} = \frac{11}{648} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。 $\textcircled{1}$ より、 $X_1+X_2=6$ のとき、 $Z_1=1$ である条件付き確率は、

$$\frac{\frac{11}{648}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{11}$$

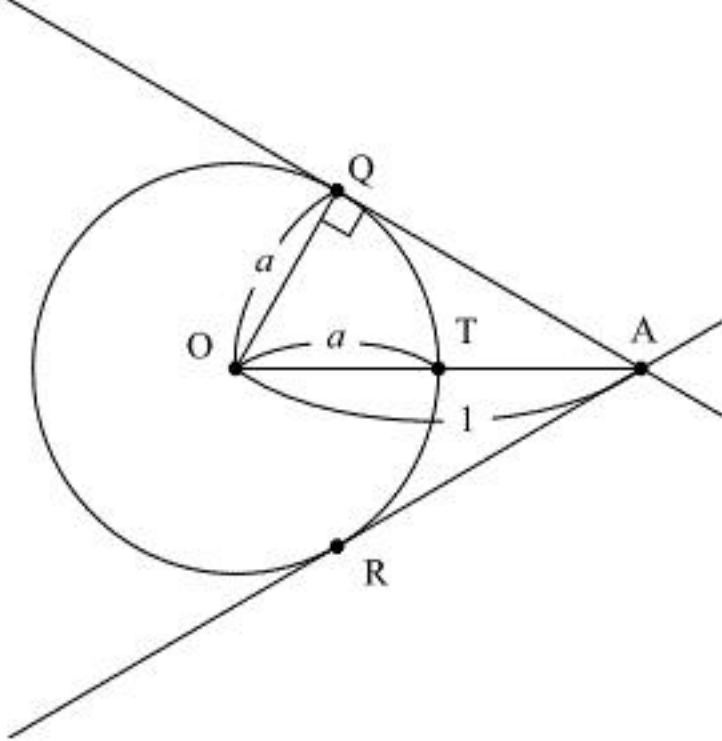
である。

(答) $\frac{6}{11}$

【4】

(1)

点AからCに2本の接線を引いたときの、2つの接点を点Q, Rとし、円Cと線分OAの交点を点Tとして図示すると以下の通りである。



点Pの軌跡は、点Tを含む方の弧QR(端点を含む)である。図より、線分APの最大値は、線分AQの長さである。△AOQにおいて、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} OA^2 &= OQ^2 + AQ^2 \\ \Leftrightarrow 1^2 &= a^2 + AQ^2 \\ \therefore AQ &= \sqrt{1-a^2} \quad (\because AQ > 0) \end{aligned}$$

である。また図より、線分APの最小値は、線分ATの長さである。図より、

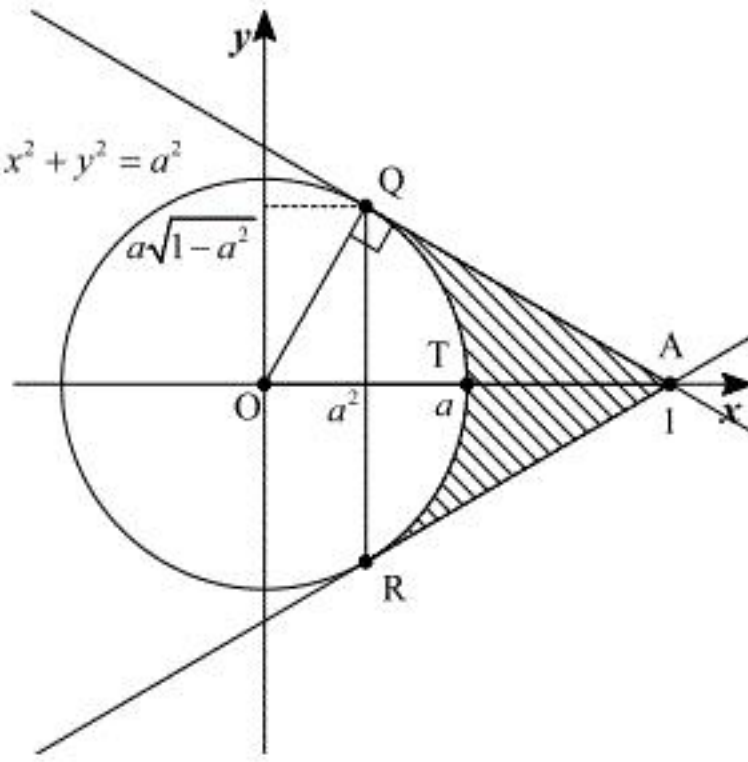
$$AT = 1 - a$$

である。

(答) 最大値 $\sqrt{1-a^2}$, 最小値 $1-a$

(2)

点Oを原点、直線OAを点Aがある側を正とするx軸、点Oを通り、直線OAに垂直な直線を点Qがある側を正とするy軸とした座標平面を考える。この座標平面における2直線AQ, ARと、点Tを含む方の弧QRによって囲まれた図形を図示すると以下の通りである。



Kは、2直線AQ, ARと、点Tを含む方の弧QRによって囲まれた図形をx軸の周りに1回転させてできる立体である。Kの体積Vを、線分QRを直径とする円を底面とし、点Aを頂点とする円錐の体積から、線分QRと点Tを含む方の弧QRによって囲まれた図形をx軸の周りに1回転させてできる立体の体積を除くことで求める。まず、点Qの座標を考える。△

AOQは、OA=1, OQ=a, AQ= $\sqrt{1-a^2}$ の直角三角形であるので、直線OQの傾きは、

$$\begin{aligned} \tan \angle AOQ &= \frac{AQ}{OQ} \\ &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \end{aligned}$$

である。よって、直線OQの方程式は、

$$y = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} x$$

である。点Qは、直線OQと円Cの交点のうちx>0であるものである。直線OQと円Cのグ

ラフの式がそれぞれ $y = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} x$ と $x^2 + y^2 = a^2$ であるので、

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} x \right)^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{1-a^2}{a^2} x^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= a^4 \\ \therefore x &= a^2 \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} x \\ &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \cdot a^2 \\ &= a\sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

である。よって、点Qの座標は、 $(a^2, a\sqrt{1-a^2})$ である。よって、線分QRを直径とする円を底面とし、点Aを頂点とする円錐の体積は、

$$\begin{aligned} \pi \left(a\sqrt{1-a^2} \right)^2 \cdot (1-a^2) \cdot \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} \cdot a^2 (1-a^2) \cdot (1-a^2) \pi \\ &= \frac{1}{3} a^2 (a+1)^2 (a-1)^2 \pi \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。弧QTを表す方程式は、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow y^2 &= a^2 - x^2 \end{aligned}$$

であり、 $y \geq 0$ であるので、

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a^2 \leq x \leq a)$$

である。よって、線分QRと点Tを含む方の弧QRによって囲まれた図形をx軸の周りに1回転させてできる立体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_{a^2}^a \pi \left(\sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx &= \int_{a^2}^a (a^2 - x^2) \pi dx \\ &= \left[\left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \pi \right]_{a^2}^a \\ &= \left(a^2 \cdot a - \frac{1}{3} a^3 \right) \pi - \left\{ a^2 \cdot a^2 - \frac{1}{3} (a^2)^3 \right\} \pi \\ &= \left(\frac{1}{3} a^6 - a^4 + \frac{2}{3} a^3 \right) \pi \\ &= \frac{1}{3} a^3 (a+2)(a-1)^2 \pi \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。Kの体積Vは、①から②を除いた値であるので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} a^2 (a+1)^2 (a-1)^2 \pi - \frac{1}{3} a^3 (a+2)(a-1)^2 \pi &= \frac{1}{3} a^2 (a-1)^2 \pi \left\{ (a+1)^2 - a(a+2) \right\} \\ &= \frac{1}{3} a^2 (a-1)^2 \pi (a^2 + 2a + 1 - a^2 - 2a) \\ &= \frac{1}{3} a^2 (a-1)^2 \pi \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3} a^2 (a-1)^2 \pi \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{3} a^2 (a-1)^2 \pi$

〔5〕

(1)

与えられた条件より,

$$\frac{w_1}{w_2} = \cos \theta + i \sin \theta \Leftrightarrow w_1 = w_2 (\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表すことができる。よって,

$$\begin{aligned} |w_1 - w_2| &= |w_2 (\cos \theta + i \sin \theta) - w_2| \\ &= |w_2| |\cos \theta - 1 + i \sin \theta| \\ &= |w_2| \left| -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right| \\ &= \left| 2 \sin \frac{\theta}{2} \right| \left| -\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2} \right| \\ &= 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \sqrt{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$|z| = 1$ より, $z = \cos \phi + i \sin \phi$ ($0 \leq \phi < 2\pi$) とする。また,

$$\alpha = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\beta = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\gamma = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$$

である。よって,

$$\arg |z - \alpha| = \phi - \pi$$

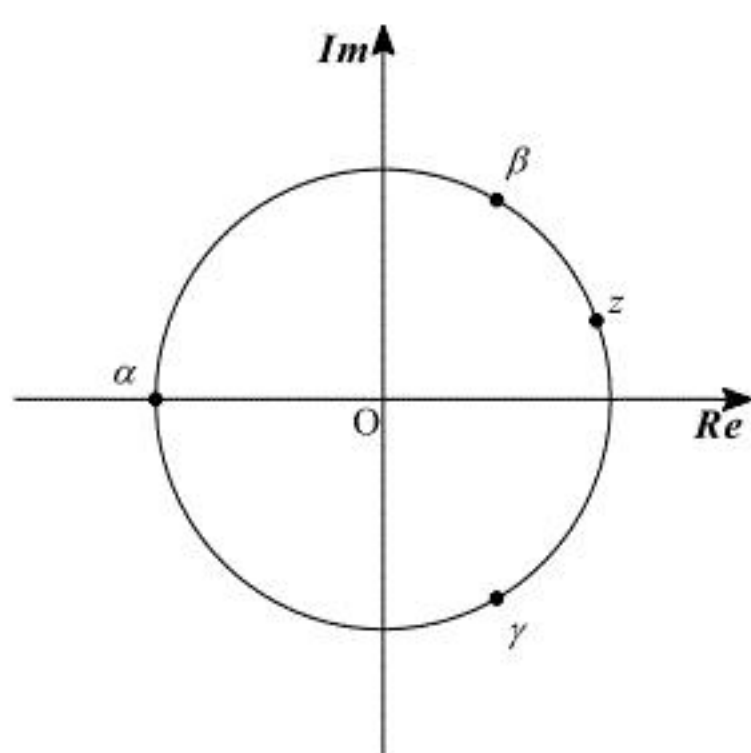
$$\arg |z - \beta| = \phi - \frac{\pi}{3}$$

$$\arg |z - \gamma| = \phi - \frac{5\pi}{3}$$

である。これらと(1)より,

$$\begin{aligned} |z - \alpha| + |z - \beta| + |z - \gamma| &= 2 \left| \sin \frac{\phi - \pi}{2} \right| + 2 \left| \sin \frac{\phi - \frac{\pi}{3}}{2} \right| + 2 \left| \sin \frac{\phi - \frac{5\pi}{3}}{2} \right| \\ &= 2 \left(\left| \sin \frac{\phi - \pi}{2} \right| + \left| \sin \frac{\phi - \frac{\pi}{3}}{2} \right| + \left| \sin \frac{\phi - \frac{5\pi}{3}}{2} \right| \right) \end{aligned}$$

である。このとき, z, α, β, γ を図示すると以下の通りである。



3点 α, β, γ を結んでできる三角形は実軸に対して対称な正三角形であるから, 対称性より,

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$ で考えてよい。よって, ①より,

$$\begin{aligned} &|z - \alpha| + |z - \beta| + |z - \gamma| \\ &= 2 \left(\left| \sin \frac{\phi - \pi}{2} \right| + \left| \sin \frac{\phi - \frac{\pi}{3}}{2} \right| + \left| \sin \frac{\phi - \frac{5\pi}{3}}{2} \right| \right) \\ &= 2 \left(-\sin \frac{\phi - \pi}{2} - \sin \frac{\phi - \frac{\pi}{3}}{2} - \sin \frac{\phi - \frac{5\pi}{3}}{2} \right) \quad (0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}) \\ &= 2 \left\{ -\left(\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\pi}{6} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{5\pi}{6} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{5\pi}{6} \right) \right\} \\ &= 2 \left\{ -\sin \frac{\phi}{2} \cdot 0 + \cos \frac{\phi}{2} \cdot 1 - \sin \frac{\phi}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \cdot \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{\phi}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \cos \frac{\phi}{2} \cdot \frac{1}{2} \right\} \\ &= 2 \left(\cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

となる。よって, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$ より, $\phi = 0$ のとき最大値を取り, 最大値は,

$$\begin{aligned} 4 \cos \frac{0}{2} &= 4 \cdot 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

であり, $\phi = \frac{\pi}{3}$ のとき最小値を取り, 最小値は,

$$\begin{aligned} 4 \cos \frac{\frac{\pi}{3}}{2} &= 4 \cos \frac{\pi}{6} \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(答) 最大値 4, 最小値 $2\sqrt{3}$