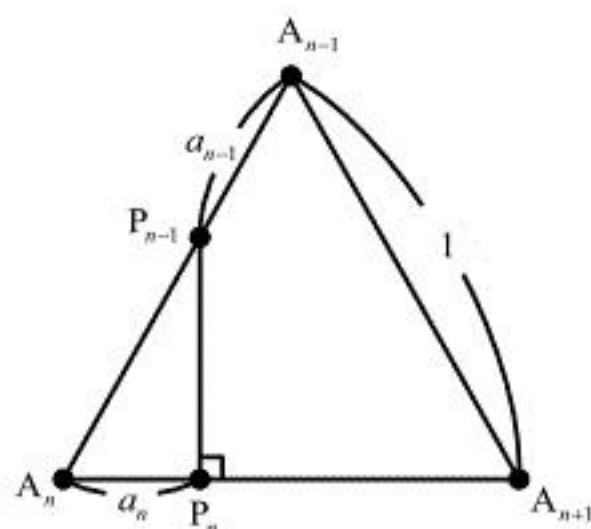


[1]



(1)

上の図から、 $\triangle P_{n-1}A_nP_n$ が $\angle A_n = 60^\circ$ の直角三角形であることを用いて $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= (1 - a_{n-1}) \cos 60^\circ \\ &= -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$

(2)

漸化式を変形すると

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

となる。これは、数列 $\left\{a_n - \frac{1}{3}\right\}$ が初項 $a_0 - \frac{1}{3}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であることを示しているから、

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{3} &= \left(a_0 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \Leftrightarrow a_n &= \left(a_0 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

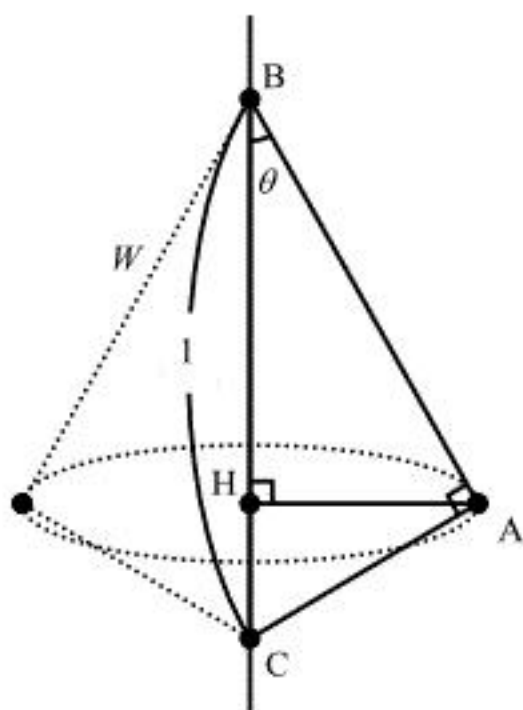
となる。よって、 $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ であることから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(a_0 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$

〔2〕



(1)

Aから辺BCに降ろした垂線の足をHとしたとき、 $\triangle ABC$ を辺BCの周りに1回転させてできる回転体 W は、上図のようにHAを半径とする円を共通の底面としたそれぞれの高さがHB、HCである2つの円錐を合わせた形となる。ここで

$$AB = \cos \theta$$

$$\begin{aligned} AH &= AB \sin \theta \\ &= \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

であるから、回転体 W の体積は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi (\sin \theta \cos \theta)^2 (BH + CH) \\ &= \frac{\pi}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\pi}{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

(2)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= 1 + AC + AB \\ &= 1 + \sin \theta + \cos \theta \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{V}{Sl} = \frac{2\pi \sin \theta \cos \theta}{3(1 + \sin \theta + \cos \theta)}$$

となる。ここで、 $\sin \theta + \cos \theta = t$ とおくと

$$\begin{aligned} t &= \sin \theta + \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $1 < t \leq \sqrt{2}$ である。また

$$\begin{aligned} t &= \sin \theta + \cos \theta \\ \Leftrightarrow t^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ \Leftrightarrow t^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= \frac{t^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{V}{Sl} &= \frac{\pi(t^2 - 1)}{3(1 + t)} \\ &= \frac{\pi}{3}(t - 1) \end{aligned}$$

となる。よって、 $\frac{V}{Sl}$ が最大となるのは、 $t = \sqrt{2}$ のときであり、このとき θ は

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

[3]

(1)

赤玉と青玉を取り出す確率は同様に確からしい。事象 A は、赤玉と青玉をそれぞれ1個ずつ取り出す場合であるので、

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{m \cdot m}{2m(2m-1)} \cdot {}_2C_1 \\ &= \frac{m}{2m-1} \end{aligned}$$

となる。事象 B は、赤玉と青玉をそれぞれ2個ずつ取り出す場合であるので、

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{m(m-1) \cdot m(m-1)}{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)} \cdot {}_4C_2 \\ &= \frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(A) = \frac{m}{2m-1}, \quad P(B) = \frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)}$$

(2)

事象 $A \cap B$ は、事象 A の後に赤玉と青玉をそれぞれ1個ずつ取り出す場合であるので、

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{m}{2m-1} \cdot \frac{(m-1)(m-1)}{(2m-2)(2m-3)} \cdot {}_2C_1 \\ &= \frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(A \cap B) = \frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)}$$

(3)

事象 A も B も起こらない確率を $P(\overline{A \cap B})$ とすると、ド・モルガンの法則を適用して

$$\begin{aligned} P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A \cap B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - \left\{ \frac{m}{2m-1} + \frac{3m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)} - \frac{m(m-1)}{(2m-1)(2m-3)} \right\} \\ &= \frac{2(2m-1)(2m-3) - 2m(2m-3) - 3m(m-1) + 2m(m-1)}{2(2m-1)(2m-3)} \\ &= \frac{3m^2 - 9m + 6}{2(2m-1)(2m-3)} \\ &= \frac{3(m-1)(m-2)}{2(2m-1)(2m-3)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3(m-1)(m-2)}{2(2m-1)(2m-3)}$$

[4]

(1)

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ は有理数なので, p を有理数として $\sqrt{a} + \sqrt{b} = p$ とおくと, $\sqrt{a} > 0, \sqrt{b} > 0$ より $p > 0$ であり

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = p$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = p - \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow a = p^2 - 2p\sqrt{b} + b \quad (\because \sqrt{a} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{b} = \frac{p^2 + b - a}{2p} \quad (\because p \neq 0)$$

となる。ここで, $\frac{p^2 + b - a}{2p}$ は有理数であるから, $\sqrt{b}$ は有理数である。同様にして, $\sqrt{a}$ も有理数であることが言える。

(証明終)

(2)

(1)と同様に q を有理数として $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = q$ とおくと, $\sqrt{a} > 0, \sqrt{b} > 0, \sqrt{c} > 0$ より $q > 0$ であり

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = q$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = q - \sqrt{c}$$

$$\Leftrightarrow a + 2\sqrt{ab} + b = q^2 - 2q\sqrt{c} + c \quad (\because \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{q^2}} + \sqrt{c} = \frac{q^2 + c - a - b}{2q} \quad (\because q > 0)$$

となる。ここで, $\frac{ab}{q^2}, \frac{q^2 + c - a - b}{2q}$ は有理数であるから, (1)より $\sqrt{c}$ は有理数である。同様にして, $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ も有理数であることが言える。

(証明終)

[5]

(1)

$$\begin{aligned}c_n(x) &= \int_0^x \cos t dt \\&= \left[t^n \sin t \right]_0^x - n \int_0^x t^{n-1} \sin t dt \\&= x^n \sin x - n \cdot s_{n-1}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_n(x) &= \int_0^x t^n \sin t dt \\&= \left[-t^n \cos t \right]_0^x + n \int_0^x t^{n-1} \cos t dt \\&= -x^n \cos x + n \cdot c_{n-1}(x)\end{aligned}$$

と変形できる。

$$(\text{答}) \quad c_n(x) = x^n \sin x - n \cdot s_{n-1}(x), \quad s_n(x) = -x^n \cos x + n \cdot c_{n-1}(x)$$

(2)

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \int_0^x t^n \cos(x-t) dt \\&= \left[-t^n \sin(x-t) \right]_0^x + n \int_0^x t^{n-1} \sin(x-t) dt \\&= n \left\{ \left[t^{n-1} \cos(x-t) \right]_0^x - (n-1) \int_0^x t^{n-2} \cos(x-t) dt \right\} \\&= nx^{n-1} - n(n-1)f_{n-2}(x)\end{aligned}$$

と変形できる。

$$(\text{答}) \quad f_n(x) = nx^{n-1} - n(n-1)f_{n-2}(x)$$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned}f_4(x) &= 4x^3 - 12f_2(x) \\&\Leftrightarrow \frac{1}{4}f_4(x) + 3f_2(x) = x^3 \\&\Leftrightarrow \int_0^x \frac{1}{4}t^4 \cos(x-t) dt + \int_0^x 3t^2 \cos(x-t) dt = x^3 \\&\Leftrightarrow \int_0^x \left(\frac{1}{4}t^4 + 3t^2 \right) \cos(x-t) dt = x^3\end{aligned}$$

となるから、 $h(t) = \frac{1}{4}t^4 + 3t^2$ としたとき、これは条件を満たす。

$$(\text{答}) \quad h(t) = \frac{1}{4}t^4 + 3t^2$$