

[1]

(1)

黒石3個と白石7個を一行に並べる並べ方の総数であるから、

$$\frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$

より、120通りとなる。

(答) 120通り

(2)

(1)より並べ方の総数は120通りであり、これらは同様に確からしい。黒石3個を1つのかたまりとして考えると、黒石が3個連続する並べ方は、黒石3個のかたまりと白石7個の計8個を一行に並べるから、

$$\frac{8!}{7!} = 8 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

となる。

(答)  $\frac{1}{15}$

(3)

「2つ以上の連続した白石の両端に黒石がある」という事象の余事象は、

「黒石と黒石の間に、白石が0個または1個のみ存在する」・・・①

という事象である。以下、①を満たす場合について、場合分けをして考える。

[1] 黒石3個が連続する場合

このときの確率は、(2)より

$$\frac{1}{15}$$

となる。

[2] 黒黒白黒または黒白黒黒の順番が含まれる場合

(2)と同様に考えて、上の4個の石を1つのかたまりとして考えて並べると、求める確率は

$$\frac{2 \cdot 7}{120} = \frac{7}{60}$$

となる。

[3] 黒白黒白黒の順番が含まれる

[2]と同様に考えて、上の5個の石を1つのかたまりとして考えて並べると、求める確率は

$$\frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

となる。

以上、[1], [2], [3]より、求める確率は

$$1 - \left( \frac{1}{15} + \frac{7}{60} + \frac{1}{20} \right) = \frac{23}{30}$$

となる。

(答)  $\frac{23}{30}$

## [2]

(1)

$m=0$ のとき,  $\sum_{k=0}^0 \frac{1}{0!} \cdot \frac{d^0}{dx^0}(x^0) = 1$ より成立する。 $m$ が自然数のとき,  $m \geq k$ より  $m-k \geq 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}(x^m) &= m \cdot (m-1) \cdots (m-k+1) \cdot x^{m-k} \\ &= {}_m P_k \cdot x^{m-k} \\ &= \frac{m!}{(m-k)!} \cdot x^{m-k} \end{aligned}$$

となる。また, 二項定理より

$$\begin{aligned} (x+1)^m &= \sum_{k=0}^m x^{m-k} \cdot {}_m C_k \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \cdot x^{m-k} \end{aligned}$$

と変形できる。したがって,  $0 \leq m \leq n$ を満たす整数  $m$  に対して,

$$(x+1)^m = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k}(x^m)$$

となることが示された。

(証明終)

(2)

$f(x)$ が実係数の  $n$ 次多項式より,  $m$ を  $0 \leq m \leq n$ を満たす整数,  $a_m$ を実数として

$$f(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m$$

と表せる。このとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} f(x) &= \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} \left( \sum_{m=0}^n a_m x^m \right) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n) \right\} \\ &= a_0 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} x^0 + a_1 \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} x^1 + \cdots + a_n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} x^n \end{aligned}$$

となる。また,  $p > q$ のとき  $\frac{d^p}{dx^p} x^q = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} f(x) &= \sum_{m=0}^n a_m \left( \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} x^m \right) \\ &= \sum_{m=0}^n a_m (x+1)^m (\because (1)) \\ &= f(x+1) \left( \because f(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m \right) \end{aligned}$$

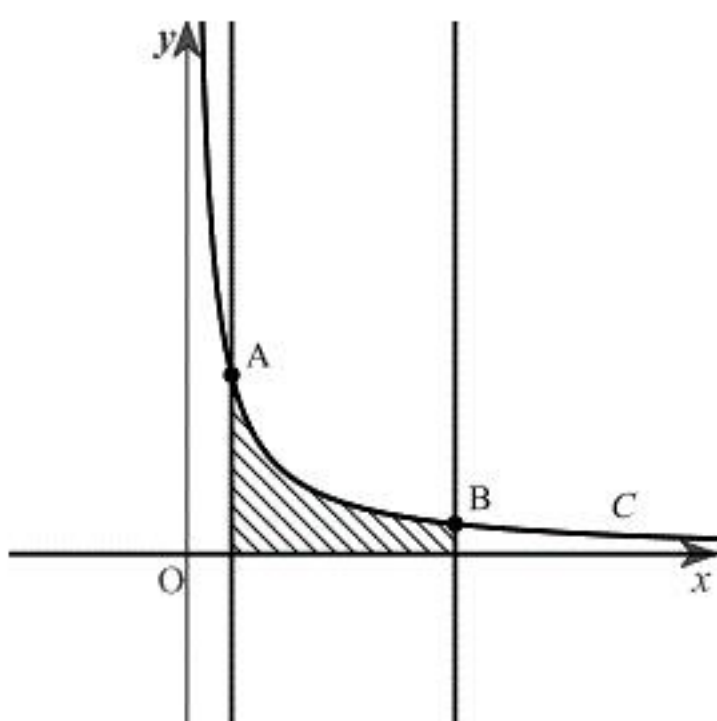
が成立する。

(証明終)

# 【3】

(1)

曲線  $C$ ，直線  $x = a$ ， $x = b$  および  $x$  軸で囲まれる部分は下図における斜線部である。



したがって、

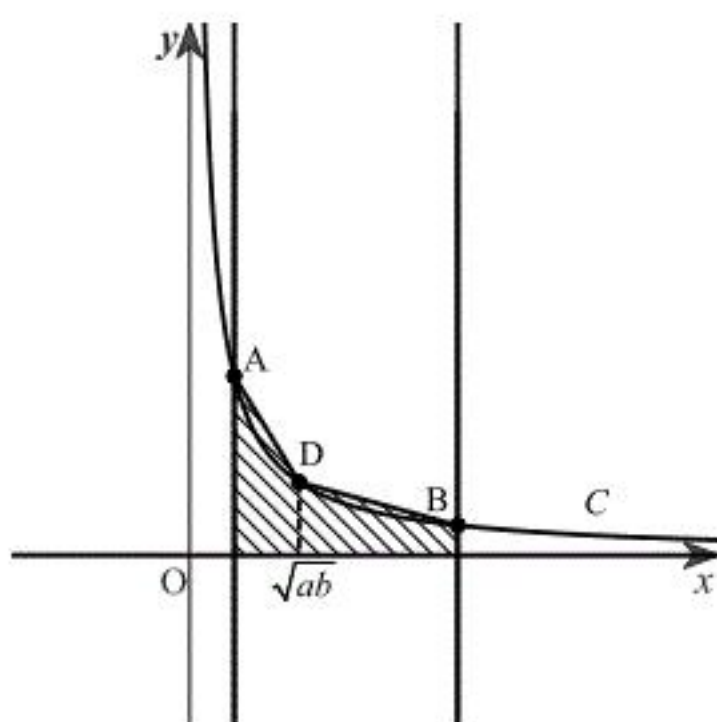
$$\begin{aligned} S(R) &= \int_a^b \frac{1}{x} dx \\ &= [\log x]_a^b \\ &= \log b - \log a \end{aligned}$$

となる。

(答)  $S(R) = \log b - \log a$

(2)

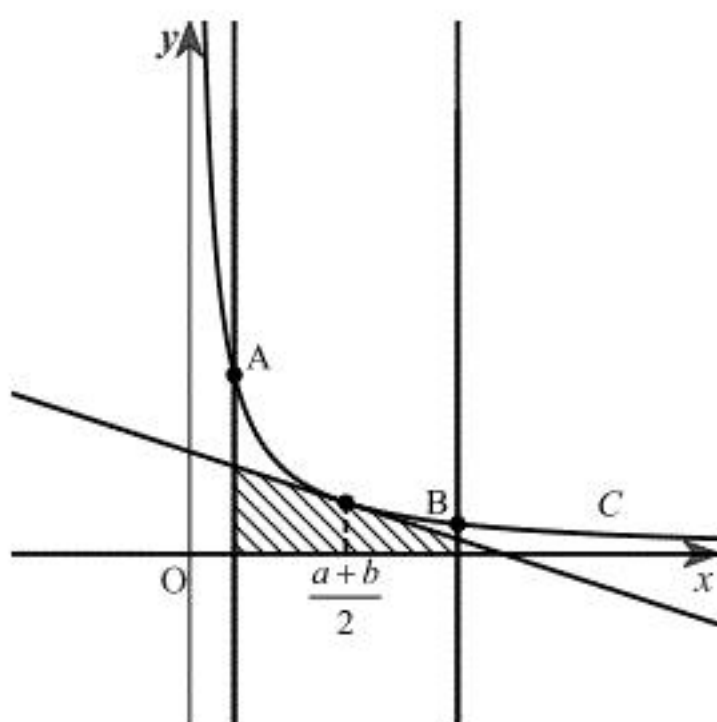
線分 AD, DB,  $x = a$ ,  $x = b$  および  $x$  軸で囲まれる部分は下図における斜線部である。



上図より、 $S(T)$  は2つの台形の組み合わせであるから

$$\begin{aligned} S(T) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) (\sqrt{ab} - a) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{b} \right) (b - \sqrt{ab}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} + 1 - 1 - \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + 1 - 1 - \sqrt{\frac{a}{b}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \\ &= \frac{b-a}{\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

となる。また、直線  $m$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  および  $x$  軸で囲まれる部分は下図における斜線部である。



接線  $m$  と曲線  $C$  の接点は条件より  $\left( \frac{a+b}{2}, \frac{2}{a+b} \right)$  であるから、 $S(U)$  は高さ  $\frac{2}{a+b}$ ，幅  $b-a$  の長方形と同じ面積である。したがって、

$$\begin{aligned} S(U) &= \frac{2}{a+b} \cdot (b-a) \\ &= \frac{2(b-a)}{a+b} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $S(T) = \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$ ,  $S(U) = \frac{2(b-a)}{a+b}$

(3)

$y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) について、 $y'' = \frac{2}{x^3} > 0$  ( $\because x > 0$ ) より、 $C$  は下に凸である。したがって、接線  $m$

は常に  $C$  の下側に存在し、線分 AD, DB は  $C$  の上側に存在する。したがって、

$$S(U) < S(R) < S(T)$$

が成り立つから、(1), (2)より

$$\begin{aligned} \frac{2(b-a)}{a+b} &< \log b - \log a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{a+b} &< \frac{\log b - \log a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}} \quad (\because b-a > 0) \end{aligned}$$

となり、与えられた不等式は示された。

(証明終)

【4】

(1)

$A(\cos \theta, 0)$ ,  $C(0, \sin \theta)$  より  $M\left(\frac{\cos \theta}{2}, \frac{\sin \theta}{2}\right)$  であるから,

$$\overrightarrow{MA}=\left(\frac{\cos \theta}{2},-\frac{\sin \theta}{2}\right)$$

となる。このとき,  $xy$  平面上の点 $\left(\frac{\cos \theta}{2},-\frac{\sin \theta}{2}\right)$ に対応する複素平面上の点 $\frac{\cos \theta}{2}-\frac{\sin \theta}{2}i$

を考えると,  $B$ は $M$ のまわりに反時計回りに $A$ を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた点であるから,

$$\left(\frac{\cos \theta}{2}-\frac{\sin \theta}{2}i\right) \cdot i=\frac{\sin \theta}{2}+\frac{\cos \theta}{2}i$$

より,

$$\overrightarrow{MB}=\left(\frac{\sin \theta}{2},\frac{\cos \theta}{2}\right)$$

となる。

$$(答) \quad \overrightarrow{MB}=\left(\frac{\sin \theta}{2},\frac{\cos \theta}{2}\right)$$

(2)

(1)より  $B\left(\frac{\cos \theta+\sin \theta}{2}, \frac{\cos \theta+\sin \theta}{2}\right)$  である。よって,  $B$ と $D$ の中点が $M$ より,  $D(p, q)$ とすると,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{1}{2}\left(p+\frac{\cos \theta+\sin \theta}{2}\right)=\frac{\cos \theta}{2} \\ \frac{1}{2}\left(q+\frac{\cos \theta+\sin \theta}{2}\right)=-\frac{\sin \theta}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} p=\frac{\cos \theta-\sin \theta}{2} \\ q=\frac{\sin \theta-\cos \theta}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

より,  $D\left(\frac{\cos \theta-\sin \theta}{2}, \frac{\sin \theta-\cos \theta}{2}\right)$  である。

$$(答) \quad B\left(\frac{\cos \theta+\sin \theta}{2}, \frac{\cos \theta+\sin \theta}{2}\right), D\left(\frac{\cos \theta-\sin \theta}{2}, \frac{\sin \theta-\cos \theta}{2}\right)$$

(3)

点 $A(\cos \theta, 0)$ ,  $C(0, \sin \theta)$  より点 $A, C$ の動く範囲は

$$A(a, 0) \quad(-1 \leq a \leq 1)$$

$$C(0, c) \quad(-1 \leq c \leq 1)$$

となる。また,  $f(\theta)=\frac{\cos \theta+\sin \theta}{2}, g(\theta)=\frac{\cos \theta-\sin \theta}{2}$  とすると

$$f'(\theta)=\frac{-\sin \theta+\cos \theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\theta+\frac{3}{4} \pi\right)$$

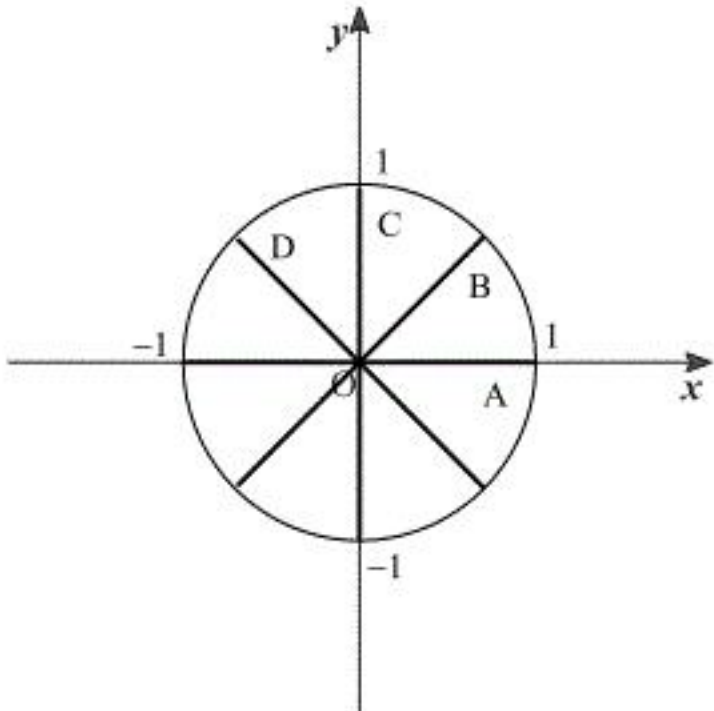
$$g'(\theta)=\frac{-\sin \theta-\cos \theta}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\theta+\frac{1}{4} \pi\right)$$

より,  $0 \leq \theta \leq 2 \pi$  における  $f(\theta), g(\theta)$  の増減表は下図のようになる。

|              |               |            |                      |            |                       |            |               |
|--------------|---------------|------------|----------------------|------------|-----------------------|------------|---------------|
| $\theta$     | 0             | ...        | $\frac{\pi}{4}$      | ...        | $\frac{5}{4} \pi$     | ...        | $2 \pi$       |
| $f'(\theta)$ |               | +          | 0                    | -          | 0                     | +          |               |
| $f(\theta)$  | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ |

|              |               |            |                       |            |                      |            |               |
|--------------|---------------|------------|-----------------------|------------|----------------------|------------|---------------|
| $\theta$     | 0             | ...        | $\frac{3}{4} \pi$     | ...        | $\frac{7}{4} \pi$    | ...        | $2 \pi$       |
| $g'(\theta)$ |               | -          | 0                     | +          | 0                    | -          |               |
| $g(\theta)$  | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ |

このとき,  $B(f(\theta), f(\theta)), D(g(\theta), -g(\theta))$  となるので, 4 点 $A, B, C, D$ の動く範囲を図示すると, 下図のようになる。

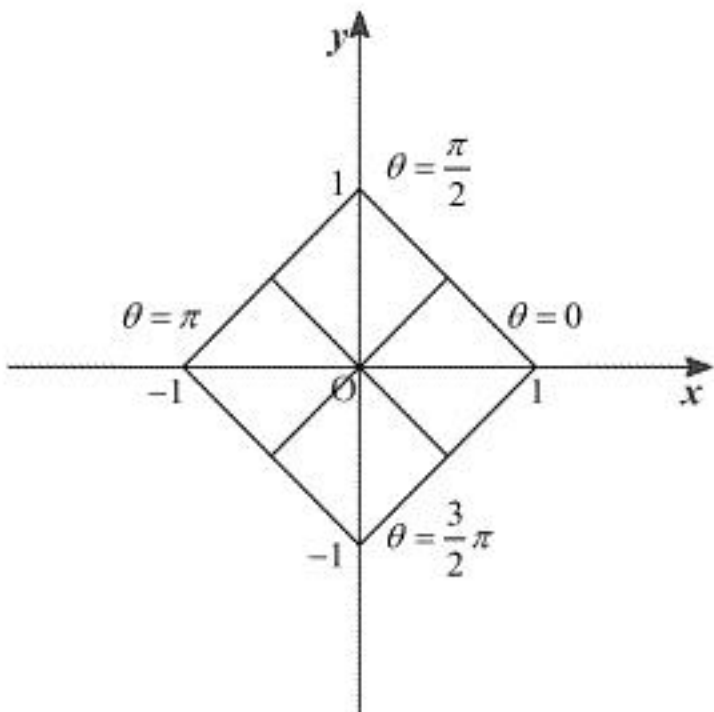


よって, 上図より 4 点 $A, B, C, D$ は全て $x^2+y^2 \leq 1$ の範囲内で動く。 $x^2+y^2=1$ 上の任意の 2 点を結んだとき, 2 点を両端とする線分は必ず $x^2+y^2 \leq 1$ の領域に存在するから, 正方形 $ABCD$ の周と内部が通過してできる図形 $W$ もまた,  $x^2+y^2 \leq 1$ によって表される領域に含まれる。

(証明終)

(4)

$\theta=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2} \pi$  のときの正方形 $ABCD$ を図示すると, 下図のようになる。



上図より  $W$ の面積 $S$ は4つの正方形の面積の和以上である。よって, 4つの正方形の面積の和は

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2=2$$

であるから,  $S \geq 2$ は示された。

(証明終)

# [5]

(1)

$n \geq 3$  のとき,  $a_n$  について考える.  $x_n = n$  のとき, 数字  $1, 2, \dots, n-1$  の順列における対称な順列と同じ条件であるから  $a_{n-1}$  個となる.  $x_n \neq n$  のとき,  $(n, x_n)$  と直線  $y = x$  に関して線対称な点の選び方が  $(n-1)$  通りであり, 残り  $(n-2)$  個の点の集合での対称な順列は数字  $1, 2, \dots, n-2$  の順列における対称な順列と同じ条件であるから  $a_{n-2}$  個となる. したがって,

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

となる.

(証明終)

(2)

(1)の式より

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_{3k+1} = a_{3k} + 3ka_{3k-1} \\ a_{3k+2} = a_{3k+1} + (3k+1)a_{3k} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a_{3k+1} - a_{3k} = 3ka_{3k-1} \\ a_{3k+2} = a_{3k} + 3ka_{3k-1} + (3k+1)a_{3k} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a_{3k+1} - a_{3k} = 3ka_{3k-1} \\ a_{3k+2} = (3k+2)a_{3k} + 3ka_{3k-1} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a_{3k+1} - a_{3k} = 3ka_{3k-1} \\ a_{3k+2} - 2a_{3k} = 3k(a_{3k} + a_{3k-1}) \end{cases} \end{aligned}$$

となるので,  $k, a_{3k}, a_{3k-1}$  は整数より  $a_{3k+1} - a_{3k}, a_{3k+2} - 2a_{3k}$  は3の倍数であるから,

$$a_{3k+1} \equiv a_{3k} \pmod{3}$$

$$a_{3k+2} \equiv 2a_{3k} \pmod{3}$$

となることが示された.

(証明終)

(3)

(1)の式より

$$\begin{aligned} a_{3(k+1)} &= a_{3k+2} + (3k+2)a_{3k+1} \\ &= a_{3k+1} + (3k+1)a_{3k} + (3k+2)a_{3k+1} \\ &= 3(k+1)a_{3k+1} + (3k+1)a_{3k} \\ &= 3(k+1)(a_{3k} + 3ka_{3k-1}) + (3k+1)a_{3k} \\ &= 2(3k+2)a_{3k} + 9k(k+1)a_{3k-1} \\ &= 3\{(2k+1)a_{3k} + 3k(k+1)a_{3k-1}\} + a_{3k} \\ &\Leftrightarrow a_{3(k+1)} - a_{3k} = 3\{(2k+1)a_{3k} + 3k(k+1)a_{3k-1}\} \end{aligned}$$

となる.  $k, a_{3k}, a_{3k-1}$  は整数より  $a_{3(k+1)} - a_{3k}$  は3の倍数であるから,

$$a_{3(k+1)} \equiv a_{3k} \pmod{3} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる. また,  $a_3 = a_2 + 2a_1 = 4$  より,  $\textcircled{1}$ を繰り返すと

$$a_{3k} \equiv a_1 = 4 \equiv 1 \pmod{3}$$

となる. よって,  $a_{3k}$  は3の倍数ではないことが分かる. このとき, (2)より2は3の倍数でないから,  $a_{3k+1}, a_{3k+2}$  も同様に3の倍数でないことが分かる. 以上より,  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$  と合わせて, すべての自然数  $n$  に対し,  $a_n$  が3の倍数でないことが示された.

(証明終)