

[1]

(1)

$a > 0, 0 \leq x \leq a$ において,

$$\begin{aligned} (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{a-x})^2 &= a - (a-x) \\ &= x \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となるから, $(\sqrt{a-x})^2 \leq (\sqrt{a})^2$ であり, $\sqrt{a-x} \geq 0, \sqrt{a} \geq 0$ より

$$\sqrt{a-x} \leq \sqrt{a} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。次に,

$$\begin{aligned} (\sqrt{a-x})^2 - \left(\frac{a-x}{\sqrt{a}}\right)^2 &= \frac{a(a-x) - (a-x)^2}{a} \\ &= \frac{x(a-x)}{a} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となるから, $\left(\frac{a-x}{\sqrt{a}}\right)^2 \leq (\sqrt{a-x})^2$ であり, $\frac{a-x}{\sqrt{a}} \geq 0, \sqrt{a-x} \geq 0$ より

$$\frac{a-x}{\sqrt{a}} \leq \sqrt{a-x} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①, ②より,

$$\frac{a-x}{\sqrt{a}} \leq \sqrt{a-x} \leq \sqrt{a}$$

となることが示された。

(証明終)

(2)

$0 \leq x \leq a$ において $e^{-x} > 0$ であるため, (1)より,

$$\frac{a-x}{\sqrt{a}} e^{-x} \leq e^{-x} \sqrt{a-x} \leq \sqrt{a} e^{-x}$$

となる。よって,

$$\int_0^a \frac{a-x}{\sqrt{a}} e^{-x} dx \leq \int_0^a e^{-x} \sqrt{a-x} dx \leq \int_0^a \sqrt{a} e^{-x} dx \quad \dots \textcircled{3}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a} e^{-x} dx &= \sqrt{a} \left[-e^{-x} \right]_0^a \\ &= \sqrt{a} - \sqrt{a} e^{-a} \end{aligned}$$

であり, また, 部分積分を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{a-x}{\sqrt{a}} e^{-x} dx &= \left[-e^{-x} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{a}} \right]_0^a - \int_0^a (-e^{-x}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{a}} \right) dx \\ &= \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \left[e^{-x} \right]_0^a \\ &= \sqrt{a} + \frac{e^{-a} - 1}{\sqrt{a}} \\ &= \sqrt{a} - \frac{1 - e^{-a}}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

であるから, ③より

$$\sqrt{a} - \frac{1 - e^{-a}}{\sqrt{a}} \leq I \leq \sqrt{a} - \sqrt{a} e^{-a}$$

となることが示された。

(証明終)

〔2〕

(1)

全ての札を区別して考えたとき、赤札が3枚、青札が3枚の6枚の札が入った袋から3枚取る
ときの取り出し方は

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

通りである。よって赤札の枚数が0枚であるとき、3枚の青札を取り出すから、その確率は

$$\frac{{}_3C_3}{20} = \frac{1}{20}$$

である。赤札の枚数が1枚であるとき、1枚の赤札と2枚の青札を取り出すから、その確率は

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_3C_2}{20} = \frac{9}{20}$$

である。赤札の枚数が2枚であるとき、2枚の赤札と1枚の青札を取り出すから、その確率は

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_3C_1}{20} = \frac{9}{20}$$

である。赤札の枚数が3枚であるとき、3枚の赤札を取り出すから、その確率は

$$\frac{{}_3C_3}{20} = \frac{1}{20}$$

である。

(答) 赤札の枚数が0枚となる確率： $\frac{1}{20}$

赤札の枚数が1枚となる確率： $\frac{9}{20}$

赤札の枚数が2枚となる確率： $\frac{9}{20}$

赤札の枚数が3枚となる確率： $\frac{1}{20}$

(2)

箱の中の3枚の札のうち赤札の枚数が1枚かつ、Bさんが箱から最初に赤札を取り出す確率は

$$\frac{9}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{20}$$

である。また、箱の中の3枚の札のうち赤札の枚数が2枚かつ、Bさんが箱から最初に赤札を取り出す確率は

$$\frac{9}{20} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{20}$$

である。また、箱の中の3枚の札のうち赤札の枚数が3枚かつ、Bさんが箱から最初に赤札を取り出す確率は

$$\frac{1}{20} \cdot 1 = \frac{1}{20}$$

である。そしてこれらの事象は排反である。以上より、Bさんが箱から最初に赤札を取り出す確率は

$$\frac{3}{20} + \frac{6}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

箱の中の3枚の札のうち赤札の枚数が1枚かつ、Bさんが1回目と2回目のどちらも箱から赤札を取り出す確率は

$$\frac{9}{20} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{20}$$

である。また、箱の中の3枚の札のうち赤札の枚数が2枚かつ、Bさんが1回目と2回目のどちらも箱から赤札を取り出す確率は

$$\frac{9}{20} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{20}$$

である。また、箱の中の3枚の札のうち赤札の枚数が3枚かつ、Bさんが1回目と2回目のどちらも箱から赤札を取り出す確率は

$$\frac{1}{20} \cdot 1^2 = \frac{1}{20}$$

である。そしてこれらの事象は排反である。以上より、Bさんが1回目と2回目のどちらも箱から赤札を取り出す確率は

$$\frac{1}{20} + \frac{4}{20} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$$

である。

(答) $\frac{3}{10}$

(4)

Bさんが箱から札を n 回取り出して、それがすべて赤札である確率は、(2)、(3)と同様に考えて、

$$\frac{9}{20} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{9}{20} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{20} \cdot 1^n = \frac{1+2^n+3^{n-2}}{20 \cdot 3^{n-2}}$$

である。また、箱の中の3枚の札がすべて赤札かつ、Bさんが箱から札を n 回取り出してそれがすべて赤札となる確率は

$$\frac{1}{20} \cdot 1^n = \frac{1}{20}$$

である。したがって、Bさんが箱から札を n 回取り出してそれがすべて赤札であったとき、箱の中の3枚の札がすべて赤札である条件付き確率は、

$$\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1+2^n+3^{n-2}}{20 \cdot 3^{n-2}}} = \frac{3^{n-2}}{1+2^n+3^{n-2}}$$

となる。

(答) $\frac{3^{n-2}}{1+2^n+3^{n-2}}$

[3]

(1)

$z_{n+1} - \beta = \alpha(z_n - \beta)$ に対して, $z_{n+1} = \alpha z_n + 1$ を代入すると,

$$\alpha z_n + 1 - \beta = \alpha(z_n - \beta)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \alpha)\beta = 1$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{1}{1 - \alpha} \quad (\because \alpha \neq 1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \beta = \frac{1}{1 - \alpha}$$

(2)

(1)より, $z_{n+1} - \frac{1}{1 - \alpha} = \alpha \left(z_n - \frac{1}{1 - \alpha} \right)$ であり, 数列 $\left\{ z_n - \frac{1}{1 - \alpha} \right\}$ は $z_1 = 1$ より

$$z_1 - \frac{1}{1 - \alpha} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

を初項とする公比 α の等比数列であるから,

$$z_n - \frac{1}{1 - \alpha} = \alpha^{n-1} \left(-\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)$$

$$\Leftrightarrow z_n = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

である。ここで, 相異なる正整数 m, n に対して, $z_m = z_n$ となるとき, $|\alpha| = 1$ より $\alpha \neq 0$ であることに注意して,

$$z_m = z_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \alpha^m}{1 - \alpha} = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^m = \alpha^n$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{n-m} = 1 \text{ かつ } \alpha^{m-n} = 1$$

となるから,

$$\alpha^{|m-n|} = 1$$

が示された。

(証明終)

(3)

背理法を利用してすべての相異なる正整数 m, n に対し $z_m \neq z_n$ であることを示す。すなわち, $z_m = z_n$ となる相異なる正整数 m, n が存在すると仮定して矛盾を導く。(2)の結果と $\alpha = \cos 2\pi r + i \sin 2\pi r$ より, ド・モアブルの定理を用いて,

$$\alpha^{|m-n|} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\pi r |m-n| + i \sin 2\pi r |m-n| = 1$$

となる。よって, 複素数の相等より整数 k を用いて

$$\begin{cases} \cos 2\pi r |m-n| = 1 \\ \sin 2\pi r |m-n| = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r |m-n| = 2\pi k$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{k}{|m-n|} \quad (\because m \neq n)$$

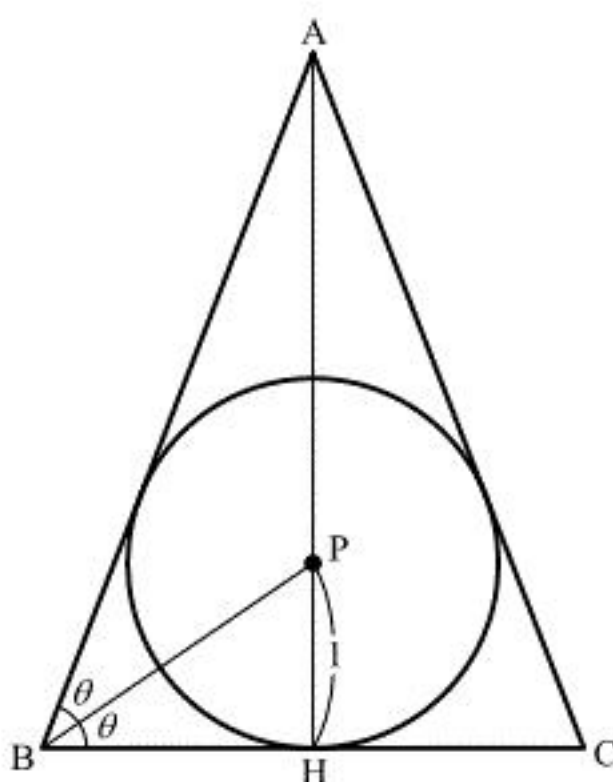
となるが, $k, |m-n|$ は整数であるから r は有理数となり, r が無理数であることに矛盾する。したがって, すべての相異なる正整数 m, n に対し $z_m \neq z_n$ であることが示された。

(証明終)

〔4〕

(1)

半径1の球の中心をP、直円錐の底面の円の中心をHとする。点Pと点Hを含む平面のうちのひとつで直円錐と球を切った断面は下図のようになり、点A, B, Cを図のように定める。



PH=1より、

$$BH = \frac{1}{\tan \theta}$$

であるから、

$$AB = \frac{BH}{\cos 2\theta} = \frac{1}{\tan \theta \cos 2\theta}$$

となる。また、直円錐の底面の円の円周の長さは $2\pi \cdot BH$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \pi \cdot AB^2 \cdot \frac{2\pi BH}{2\pi AB} \\ &= \pi \cdot AB \cdot BH \\ &= \frac{\pi}{\tan^2 \theta \cos 2\theta} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{\pi}{\tan^2 \theta \cos 2\theta}$

(2)

$$u = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\tan^2 \theta}$$

であり、

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\frac{1}{\tan^2 \theta}} &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \frac{u+1}{u} &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta &= \frac{u}{u+1} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{\tan^2 \theta \cos 2\theta} \\ &= \frac{\pi}{\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \theta - 1} \\ &= \frac{\pi u}{\frac{2u}{u+1} - 1} \\ &= \frac{\pi u(u+1)}{u-1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より $0 < \tan \theta < 1$ であるから、 $u > 1$ であり、このもとで

$$\begin{aligned} \frac{dS}{du} &= \pi \frac{(2u+1)(u-1) - u(u+1) \cdot 1}{(u-1)^2} \\ &= \pi \frac{2u^2 - u - 1 - u^2 - u}{(u-1)^2} \\ &= \pi \frac{u^2 - 2u - 1}{(u-1)^2} \\ &= \pi \frac{\{u - (1 + \sqrt{2})\} \{u - (1 - \sqrt{2})\}}{(u-1)^2} \end{aligned}$$

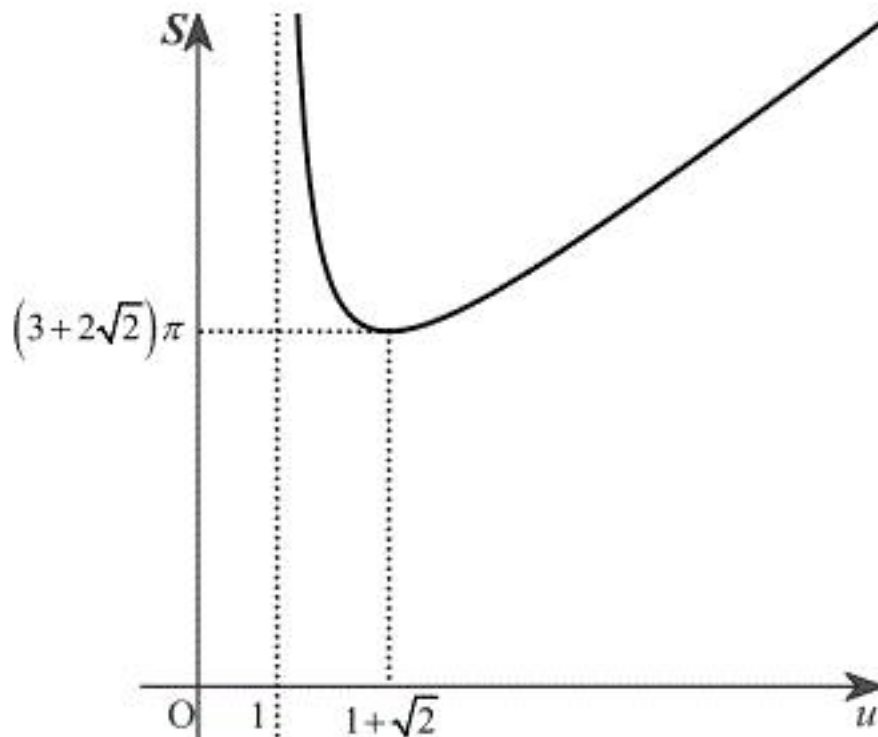
である。また、 $u = 1 + \sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} + 1)}{(1 + \sqrt{2}) - 1} \\ &= (1 + \sqrt{2})^2 \pi \\ &= (3 + 2\sqrt{2})\pi \end{aligned}$$

であるから、 u の関数である S の増減表は次のようになる。

u	(1)	...	$1 + \sqrt{2}$	...
$\frac{dS}{du}$		-	0	+
S		↘	$(3 + 2\sqrt{2})\pi$	↗

したがって、 u の関数である S のグラフの概形は次のようになり、 S は $u = 1 + \sqrt{2}$ で最小値 $(3 + 2\sqrt{2})\pi$ をとる。



(答) グラフ：前図、最小値： $(3 + 2\sqrt{2})\pi$

〔5〕

〔解答〕

(1) $(x, y) = (bk, ak)$ (k は整数)

(2)
自然数 n, i, j が $n-1 \geq i > j \geq 1$ を満たすとき、

$$\begin{aligned} {}_nC_i \cdot {}_iC_j &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} \\ &= \frac{n!}{j!(n-i)!(i-j)!} \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} {}_nC_j \cdot {}_{n-j}C_{i-j} &= \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{(n-j)!}{(i-j)! \{(n-j)-(i-j)\}!} \\ &= \frac{n!}{j!(n-i)!(i-j)!} \end{aligned}$$

であるから、

$${}_nC_i \cdot {}_iC_j = {}_nC_j \cdot {}_{n-j}C_{i-j} \quad \cdots \textcircled{2}$$

であることが示された。

(証明終)

(3)

背理法を利用して、 ${}_nC_j$ と ${}_nC_i$ とは互いに素ではないことを示す。すなわち、 ${}_nC_j$ と ${}_nC_i$ とが互いに素であることを仮定して矛盾を導く。②について、 ${}_nC_j$ と ${}_nC_i$ とが互いに素であるとき、(1)より

$$\begin{cases} {}_iC_j = k \cdot {}_nC_j \\ {}_{n-j}C_{i-j} = k \cdot {}_nC_i \end{cases}$$

を満たす整数 k が存在する。ここで、

$$\begin{aligned} k &= \frac{{}_iC_j}{{}_nC_j} \\ &= \frac{\frac{i!}{j!(i-j)!}}{\frac{n!}{j!(n-j)!}} \\ &= \frac{i}{n} \cdot \frac{i-1}{n-1} \cdot \frac{i-2}{n-2} \cdots \frac{i-j+1}{n-j+1} \end{aligned}$$

であるが、 $n-1 \geq i > j \geq 1$ より、

$$0 < \frac{i}{n}, \frac{i-1}{n-1}, \dots, \frac{i-j+1}{n-j+1} < 1$$

であるため、 $0 < k < 1$ となり、 k が整数であることに矛盾する。したがって、 ${}_nC_j$ と ${}_nC_i$ とは互いに素ではないことが示された。

(証明終)

〔解説〕

(1)

x, y の一次方程式

$$ax = by \quad \cdots \textcircled{1}$$

が整数解をもつとき、 a, b は互いに素な自然数であるから、 k を整数として、 $x = bk$ と表すことができる。このとき、①より $y = ak$ と表すことができる。したがって、①のすべての整数解は

$$(x, y) = (bk, ak)$$

となる。