

平成 7 年度

前期日程

数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 6 か所）にはっきり記入すること。
3. 問題本文は、3 ページと、5 ページと、7 ページと、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には解答用紙 3 枚と白紙 1 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算、推論等を含む）は、解答用紙の指定されたところに記入すること。
6. 問題冊子の下書き用紙及び余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子及び白紙は持ち帰ること。

1 次の2つのだ円を考える。

$$\text{だ円 } A : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \text{ だ円 } B : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

これらに関して、以下の問いに答えよ。

- (1) だ円 A をだ円 B に移し、点 $(2, 0)$ を点 $(\cos \theta, 2 \sin \theta)$ に移す1次変換を表す行列を求めよ。
- (2) だ円 A をだ円 B に移す1次変換を f とする。原点を O とし、2点 $(2, 0)$, $(0, 1)$ が f によって移る点をそれぞれ P , Q とする。 $\angle POQ$ が最小となるように f を選んだとき、 $\cos \angle POQ$ を求めよ。

(配点率 20 %)

2 どのような実数 x に対しても，不等式

$$|x^3 + ax^2 + bx + c| \leq |x^3|$$

が成り立つように，実数 a, b, c を定めよ。

(配点率 20 %)

3 正の実数 a に対して， $f(x) = a \log x + 1$ とおく。点 $(-a, 0)$ から曲線 $y = f(x)$ に接線をひき，接点の x 座標を x_0 とする。曲線 $y = f(x)$ と x 軸と直線 $x = x_0$ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ で表す。

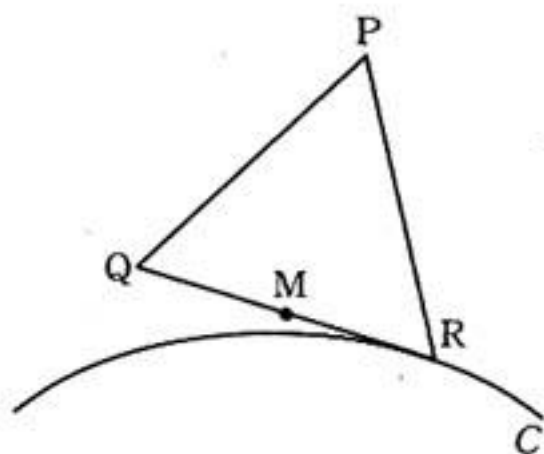
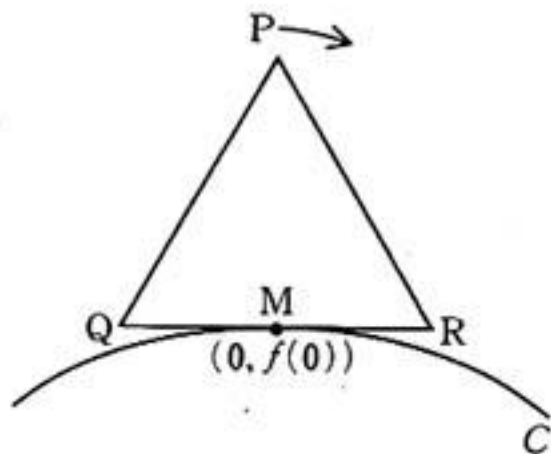
(1) $S(a)$ を求めよ。

(2) $\frac{S(a)}{a^2}$ の最大値を求めよ。

(配点率 20 %)

4

$f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ とおき，曲線 $C: y = f(x)$ を考える。一辺の長さ a の正三角形 PQR は最初，辺 QR の中点 M が曲線 C 上の点 $(0, f(0))$ に一致し， QR が C に接し，さらに P が $y > f(x)$ の範囲にあるようにおかれている。ついで， $\triangle PQR$ が曲線 C に接しながら滑ることなく右に傾いてゆく。最初の状態から，点 R が初めて曲線 C 上にくるまでの間，点 P の y 座標が一定であるように， a を定めよ。



(配点率 20%)

5 自然数 n に対して図形 T_n を以下のように順に定義する。まず T_1 は、3つの点を2つの長さ1の線分で図1のように結んで定義する。一般に図形 T_{n+1} は図形 T_n を2つと点を1つ用意し、その点と T_n の一番上の点を長さ1の線分で結ぶことにより、図2のように定義する。たとえば T_3 は図3のようになる。 T_n を通信回路と考える。隣接する2つの点を結ぶ長さ1の通信路が故障しているかどうかは互いに独立であって、その確率はすべて p であるとする。 T_n の一番上の点を0、一番下の 2^n 個の点の集合を A_n で表す。0から A_n のどの点へも通信できない確率を p_n とする。

- (1) p_n と p_{n+1} の関係式を求めよ。
- (2) $1 - p_{n+1} \leq 2(1 - p)(1 - p_n)$ となることを示せ。
- (3) $p > \frac{1}{2}$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。



図1: T_1

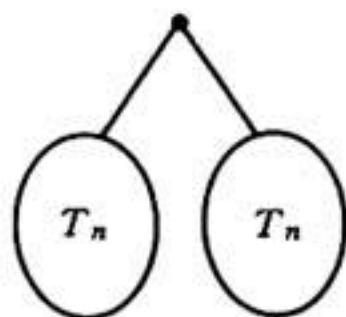


図2: T_{n+1}

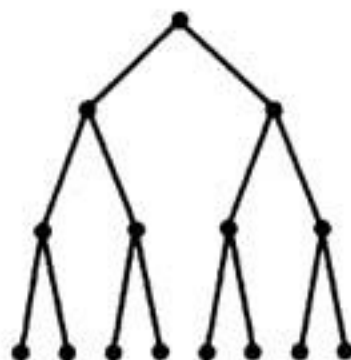


図3: T_3

(配点率 20%)