

平成 8 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 6 か所）にはっきり記入すること。
3. 問題本文は、3 ページと、5 ページと、7 ページと、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には解答用紙 3 枚と白紙 1 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算、推論等を含む）は、解答用紙の指定されたところに記入すること。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子及び白紙は持ち帰ること。

1 次の2条件(i), (ii)を同時にみたす整数 a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。

(i) 2次方程式

$$X^2 + aX + b = 0$$

の2つの解が共に2以上の整数である。

(ii) 不等式 $3a + 2b \leq 0$ が成り立つ。

(配点率 20 %)

2 a を正の数として, 2平面 α, β

$$\alpha : \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + z = 1, \quad \beta : \frac{x}{a} + \frac{y}{a} - z = 1$$

と2点 $A(a, 0, 0), B(0, a, 0)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 原点 $O(0, 0, 0)$ の平面 α に関する対称点を C , 平面 β に関する対称点を D とするとき, C, D の座標を求めよ。

(2) 直線 CD と平面 $z = 0$ との交点が $\triangle ABO$ の内部(ただし, 線分 AB を含める)にあるための a の範囲を求めよ。

(3) $a = 2$ とする。点 P が平面 α 上を動き, 点 Q が平面 β 上を動くとき, 線分の長さの和

$$OP + PQ + QO$$

の最小値とそのときの P, Q の座標を求めよ。

(配点率 20 %)

3 n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$n \log n - n + 1 < \sum_{k=1}^n \log k < (n+1) \log n - n + 1$$

が成り立つことを示せ。

(2) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n \log n}}$$

を求めよ。

(配点率 20 %)

4 中心 O 半径 1 の円の円周上の 2 点を P, Q とし, $\angle POQ = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。 P における円の接線と直線 OQ との交点を R , P から OQ に下ろした垂線の足を H とし, 弧 $\widehat{PQ}$ と線分 PH, HQ で囲まれる部分を D とする。 次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OPR$ の面積 S_1 と D の面積 S_2 に対して

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S_2}{S_1}$$

を求めよ。

- (2) OR を軸として $\triangle OPR$ を回転させてできる立体の体積 V_1 と D を回転させてできる立体の体積 V_2 に対して

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{V_2}{\theta^2 V_1}$$

を求めよ。

(配点率 20 %)

5 黒玉が2個入っている箱がある。いま、次のような試行を繰り返す。箱から無作為に玉を1個取り出す。もし取り出した玉が黒玉ならばさいころを投げ、出た目が4以下のときはそれをそのまま箱に戻し、出た目が5以上のときはそれを白玉と取りかえて箱に戻す。もし取り出した玉が白玉ならばそのまま箱に戻す。

n 回目の試行が終わったとき箱に入っている白玉の数を X_n とし、 $X_n = k$ である事象 $\{X_n = k\}$ の起こる確率を $P(X_n = k)$ で表す。

ただし、 $P(X_0 = 0) = 1$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 事象 $\{X_{n-1} = 0\}$ および $\{X_{n-1} = 1\}$ のそれぞれのもとで事象 $\{X_n = 1\}$ の起こる条件つき確率を求めよ。
- (2) $P(X_n = 1)$ を $P(X_{n-1} = 1)$ を用いて表せ。
- (3) X_n の確率分布を求めよ。
- (4) n 回目の試行が終わったときに箱に入っている白玉の数がはじめて2個になる確率を求めよ。

(配点率 20 %)