

平成 9 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 6 か所）にはっきり記入すること。
3. 問題本文は、3 ページと、5 ページと、7 ページと、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には解答用紙 3 枚と白紙 1 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算、推論等を含む）は、解答用紙の指定されたところに記入すること。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子及び白紙は持ち帰ること。

1 座標平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ。 x 座標と y 座標がともに 0 以上 3 以下である 16 個の格子点を図 1 のように線分で結んで得られる図形 L を考える。

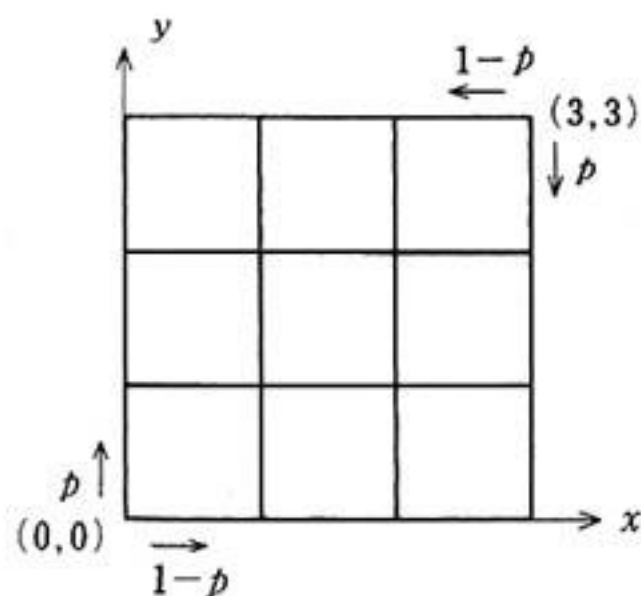
動点 A は点 $(0, 0)$ を出発し、点 $(3, 3)$ に到達するまで L 上を等速で移動する。ただし、格子点では静止せずに x 軸の正の方向または y 軸の正の方向へ進み、次の格子点までは線分上を直進する。

動点 B は点 $(3, 3)$ を出発し、点 $(0, 0)$ に到達するまで L 上を等速で移動する。ただし、格子点では静止せずに x 軸の負の方向または y 軸の負の方向へ進み、次の格子点までは線分上を直進する。

A 、 B は同時に出発し、 A の速さは B の速さの 3 倍とする。

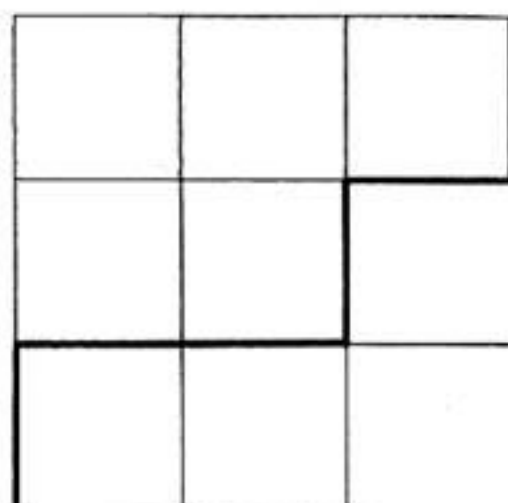
このとき次の問いに答えよ。

- (1) A と B が出会う可能性のある L 上の点をすべて求め、それらの座標を書け。
- (2) A は進む方向の可能性が 2 つある格子点では、確率 p で y 軸の正の方向に、確率 $1 - p$ で x 軸の正の方向に進むとする。同様に、 B は進む方向の可能性が 2 つある格子点では、確率 p で y 軸の負の方向に、確率 $1 - p$ で x 軸の負の方向に進むとする。ただし、 $0 < p < 1$ とする。このとき、(1) で求めた各点において、 A と B が出会う確率をそれぞれ求めよ。
- (3) (2) で求めた確率のうちで、 x 座標が最も小さい点で出会う確率が、他のどの確率よりも大きくなるためには p はどのような範囲にあればよいか。



L

図 1



A 、 B の経路の例

図 2

(配点率 20 %)

2 平面上において、直線 ℓ と、 ℓ 上にない点 A をとる。

直線 ℓ 上に点 B を線分 AB と直線 ℓ が直交するようにとり、点 B を中心として直線 ℓ を角度 θ だけ回転して得られる直線を m とする。

直線 ℓ 上にない点 P をとり、直線 ℓ に関して P と対称な点 Q をとる。また点 A を中心として点 Q を角度 2θ だけ回転して得られる点を R とする。

このとき線分 PR の中点 M は直線 m 上にあることを証明せよ。

(配点率 20 %)

3 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) と双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$ ($c > 0$) を考える。

点 $P(s, t)$ ($s > 0, t > 0$) を双曲線上にとり、原点 O と点 P を結ぶ線分と楕円の交点を Q とする。点 P における双曲線の接線が x 軸と交わる点を A 、点 Q における楕円の接線が x 軸と交わる点を B とする。

点 P を直線 PA と直線 QB が直交するようにとるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) 点 A, B はそれぞれ楕円、双曲線の焦点であることを示せ。
- (3) k を $0 < k < 1$ をみたす定数とする。 a, b, c が $a^2 + c^2 = 1$,
 $a^2 - b^2 = k^2$ をみたしながら変化するとき、直線 PA と直線 QB の交点 R の y 座標が最大となるような a, b, c を求めよ。

(配点率 20 %)

4 a は実数とする。曲線 $y = e^x$ 上の各点における法線のうちで、点 $P(a, 3)$ を通るものの個数を $n(a)$ とする。 $n(a)$ を求めよ。

(配点率 20 %)

- 5 関数 $f(\theta) = \sqrt{2} \sin^2 \theta + \cos \theta$ に対し、次の条件をみたす正の数 a を考える。

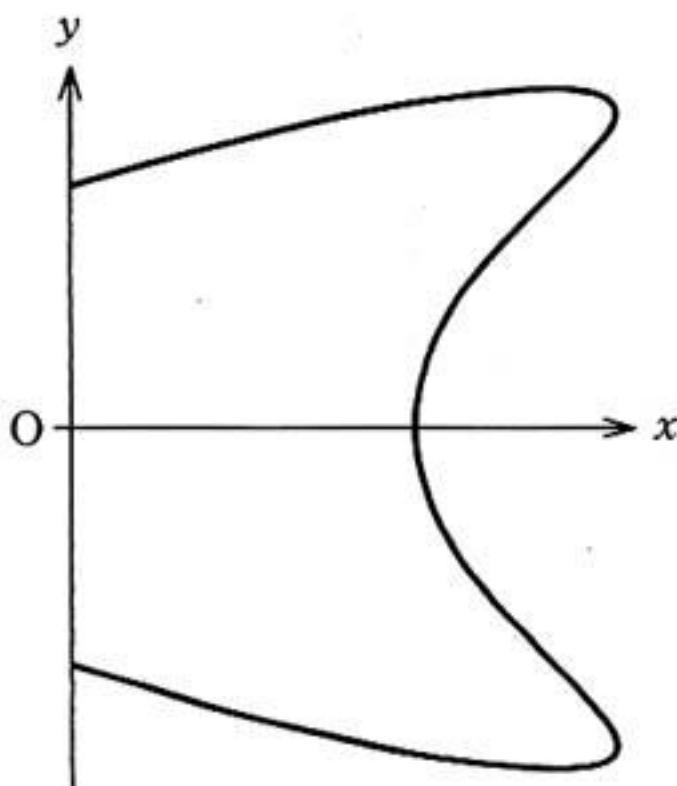
$$\begin{cases} |\theta| < a \text{ ならば } f(\theta) > 0 \\ |\theta| = a \text{ ならば } f(\theta) = 0 \end{cases}$$

- (1) a の値を求めよ。
(2) 曲線 C を媒介変数 θ ($-a \leq \theta \leq a$) を用いて

$$C: \begin{cases} x = f(\theta) \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

で定める。 x 軸に平行な直線 $y = t$ と曲線 C が共有点をもつような実数 t の範囲を求め、共有点の x 座標を t で表せ。

- (3) 曲線 C と y 軸とで囲まれる図形を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。



曲線 C の概形

(配点率 20 %)