

平成 10 年 度

前 期 日 程

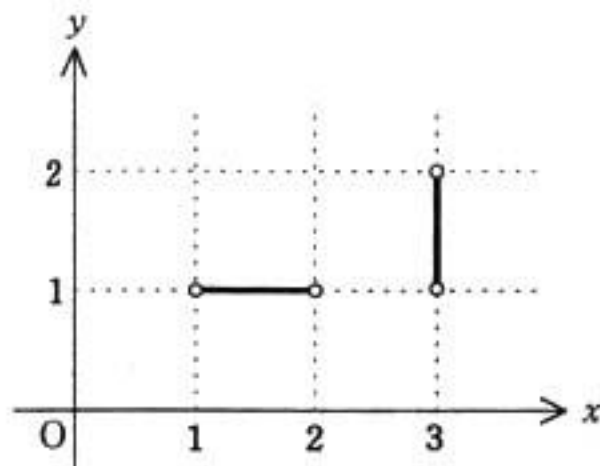
数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 6 か所）にはっきり記入すること。
3. 問題本文は、3 ページと、5 ページと、7 ページと、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には解答用紙 3 枚と白紙 1 枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算、推論等を含む）は、解答用紙の指定されたところに記入すること。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子及び白紙は持ち帰ること。

1 座標平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また、2つの格子点を結ぶ長さ 1 の線分から両端の点を除いたものを格子辺という。次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(630, 5400)$ を通る直線 $y = ax$ (a は定数) は $0 \leq x \leq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。
- (2) n を 2 以上の整数とする。点 $P(630, 5400)$ を通る曲線 $y = bx^n$ (b は n により定まる定数) は $0 \leq x \leq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。



格子辺の例

(配点率 20 %)

2 n を 1 以上の整数とする. n 次の整式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_k x^{n-k} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

とその導関数 $f'(x)$ の間に

$$n f(x) = (x + p) f'(x)$$

という関係があるとする. ただし, p は定数である. このとき

$$f(x) = a_0 (x + p)^n$$

であることを示せ.

(配点率 20 %)

3 (1) a を 1 より大きい実数とする. 0 以上の任意の実数 x に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\log 2 + \frac{x}{2} \log a \leq \log(1 + a^x) \leq \log 2 + \frac{x}{2} \log a + \frac{x^2}{8} (\log a)^2$$

ただし, 対数は自然対数である.

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n = \left(\frac{1 + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n$$

とおく. (1) の不等式を用いて極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

を求めよ.

(配点率 20 %)

4

平面上において, 7 点 A, P, Q, R, S, R', S' を下図のようにとる. ただし,

$$AP = a, PQ = b, QR = QR' = c, RS = R'S' = d,$$

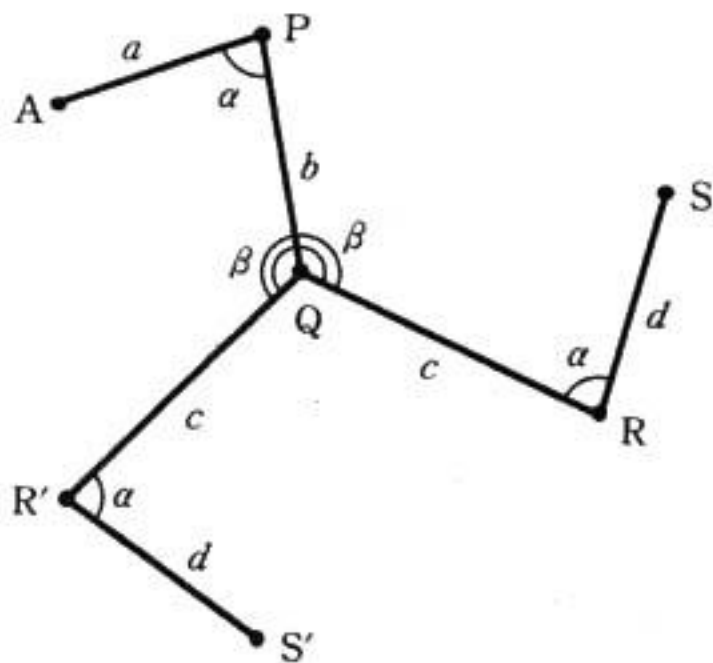
$$\angle APQ = \angle SRQ = \angle S'R'Q = \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

$$\angle RQP = \angle PQR' = \beta \quad (0 \leq \beta \leq \pi)$$

である. このとき

$$AS^2 - AS'^2$$

を $\sin \alpha, \sin \beta$ および a, b, c, d を用いて表せ.



(配点率 20 %)

5

座標空間において

平面 $z = \sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$, 中心 $(0, 0, \sqrt{2})$ の円を C_1

平面 $z = -\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$, 中心 $(0, 0, -\sqrt{2})$ の円を C_2

とする. また, 空間内の点 $P(x, y, z)$ に対し

円 C_1 上を動く点 Q と P の距離の 最小値 を m

円 C_2 上を動く点 R と P の距離の 最大値 を M

とする.

次の問いに答えよ.

(1) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくとき, m と M を r および z で表せ.

(2) $|M - 2\sqrt{6}| \geq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする. 図形 H の体積を求めよ.

(配点率 20 %)