

1 座標平面上の4点 $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 8)$, $D(1, 8)$ を頂点とする長方形を R とする. また $0 < t < 4$ に対し, 原点 $O(0, 0)$, 点 $E(4, 0)$, および点 $P(t, 8t - 2t^2)$ の3点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする.

- (1) R の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ.
- (2) t が $0 < t < 4$ の範囲で動くとき, $f(t)$ を最大にする t の値と, そのときの最大値を求めよ.

(配点率 30 %)

2 空間のベクトル $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ を考える. ただし, どちらも零ベクトルではないとする. $k = 1, 2, 3$ に対し, 複素数

$$z_k = x_k + y_k i \quad (i = \sqrt{-1} \text{ は虚数単位})$$

を考え, 複素数 $w_k = u_k + v_k i$ (u_k, v_k は実数) を

$$w_k = (\sqrt{3} + i)z_k$$

で定める. さらに u_k, v_k から定まるベクトル

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

を考える.

- (1) $\vec{x}$ の大きさを r , $\vec{y}$ の大きさを s , $\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) とするとき $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ を r, s, θ で表せ.
- (2) $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の大きさが等しく, 両者はたがいに垂直であるとする. このとき $\vec{u}$ と $\vec{v}$ も大きさが等しく, たがいに垂直であることを示せ.
- (3) (2)の仮定のもとで, $\vec{x}$ と $\vec{u}$ のなす角を求めよ.

(配点率 35 %)

3 各整数 k に対し、座標平面上の点

$$P_k\left(\frac{k}{500}, 0\right), Q_k\left(\frac{k}{500}, 1\right)$$

をとり、3点 P_{k-1} , P_k , Q_k を頂点とする三角形 T_k を考える. また、各自然数 n に対し

$$f_n(x) = 2 \times 10^{-nx}$$

とおく. 曲線 $y = f_n(x)$ 上の動点 R が、点 $(0, 2)$ から出発して x 座標が大きくなる方向に動くとき、三角形 T_k のうち、 R が最初にその内部を通過するものが T_8 となるような n をすべて求めよ. ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする.

(配点率 35 %)