

1 2つの複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ (x, y, u, v は実数, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) に対し, $x \geq u$ と $y \geq v$ がともに成り立つとき, $z \gg w$ と書くことにする.

(1) 次の条件

$$z^2 \gg 3 \quad \text{かつ} \quad \bar{z} \gg -\frac{5}{\bar{z}}$$

をみたす複素数 z の範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ. ただし, $\bar{z}$ は z に共役な複素数とする.

(2) (1)で求めた範囲を z が動くとき, 絶対値 $|z - 3i|$ の最小値, および最小値をあたえる z を求めよ.

(配点率 20 %)

2

$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2$ とおく. 曲線 $y = f(x)$ に点 $(0, a)$ から接線がただひとつ引けるとし, しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする. このときの a の値を求めよ.

(配点率 20 %)

3 半径 1 の円周上に, $4n$ 個の点 $P_0, P_1, \dots, P_{4n-1}$ が, 反時計回りに等間隔に並んでいるとする. ただし, n は自然数である.

- (1) 線分 P_0P_k の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ.
- (2) 点 $P_0, P_1, \dots, P_{4n-1}$ のうちの相異なる 3 点を頂点に持つ三角形のうち, 各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ.

(配点率 20 %)

4 関数 $f(x) = 4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3$ を考える. n, k を自然数とし

$$g_n(k) = f\left(\frac{\pi}{3n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3n}\right) + \cdots + f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく. ただし $n \geq 2$ とする.

(1) n を固定する. $2 \leq k \leq 3n$ の範囲で $g_n(k-1) \geq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ. また, k が $1 \leq k \leq 3n$ の範囲を動くとき, $g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ.

(2) (1) における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする. このとき極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{n}$$

を求めよ.

(配点率 20%)

5 数列 $\{a_n\}$ において、各項 a_n が $a_n \geq 0$ をみたし、かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ が成り立つとする。さらに各 n に対し

$$b_n = (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)$$

$$c_n = 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

とおく。

- (1) すべての n に対し不等式 $b_n \geq c_n$ が成り立つことを、数学的帰納法で示せ。
- (2) ある n について $b_{n+1} = c_{n+1}$ が成り立てば、 $b_n = c_n$ となることを示せ。
- (3) $b_3 = \frac{1}{2}$ となるとき、 $c_3 = \frac{1}{2}$ であることを示せ。また $b_3 = \frac{1}{2}$ となる数列 $\{a_n\}$ は全部で何種類あるかを求めよ。

(配点率 20 %)