

1

実数を係数とする 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

が異なる 3 つの実数解をもつとする. このとき, $a > 0$, $b > 0$ ならば, 少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ.

(配点率 20%)

2

平面上に双曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ を考える. a, b, c, d を $d < c < 0 < b < a$ をみたす数とし, 曲線 C 上の 4 点 P, Q, R, S をそれぞれ x 座標が a, b, c, d であるような点としたとき, 四角形 PQSR が長方形になっているとする.

- (1) b, c, d を a を用いて表せ.
- (2) 線分 PR と x 軸との交点を T, 線分 QS と y 軸との交点を U とするとき, 線分 TU と曲線 C が共通点をもたないような a の値の範囲を求めよ.
- (3) a が (2) の範囲にあるとき, 3 線分 PT, TU, UQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ.
- (4) a が (2) の範囲を動くとき, $S(a)$ の増減を調べその最大値を求めよ.

(配点率 20%)

3

α を $|\alpha| = 1$ であるような複素数とし、複素数の列 $\{z_n\}$ を

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{\alpha^4}{2}, \quad \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{\alpha^2}{4} \frac{\bar{z}_{n-2}}{\bar{z}_{n-1}} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

で定める。ただし、 $\bar{z}_n$ は複素数 z_n の共役な複素数とする。

(1) 各 n に対し、 z_n を求めよ。

(2) z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n, y_n とし、 $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくとき、
無限級数の和

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

をそれぞれ求めよ。

(配点率 20%)

4 n を $n \geq 7$ をみたす整数とし、1つのさいころを投げる試行を n 回くり返す。

このとき、 $2 \leq k \leq n$ をみたす整数 k に対し、「 n 回の試行のうち、同じ目が出るどの2つの試行も k 以上離れている」という事象が起こる確率を p_k と表す。ただし、 i 番目の試行と j 番目の試行について、この2つの試行は $|i - j|$ だけ離れているということにする。

(1) p_2 の値を求めよ。

(2) $k \geq 3$ のとき、 p_k の値を求めよ。

(3) 「 n 回の試行において、同じ目が続くことはなく、しかも同じ目が出る試行の組でちょうど2だけ離れたものが少なくとも1組存在する」という事象が起こる確率を求めよ。

(配点率 20%)

5

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と点 $P(0, \sin \alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。ただし $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。円 C_2 と x 軸との交点を A , B とし, A , B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ ℓ_A , ℓ_B とする。2 直線 ℓ_A , ℓ_B ではさまれた領域の部分で, 円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1 , 円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする。いま, D_1 , D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha)$, $V_2(\alpha)$ とする。

(1) $V_1(\alpha)$, $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ。

(2) α が $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ。

(配点率 20%)