

1

(4) $\vec{a}=(a_1, a_2), \vec{b}=(b_1, b_2), \vec{c}=(c_1, c_2)$ とする。
 $l=a_1b_2-a_2b_1, m=(b_1c_2-b_2c_1), n=c_1a_2-c_2a_1$
 $\therefore a \neq 0$. $l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}$ の x 成分と y 成分はそれぞれ
 x 成分 $\dots (a_1b_2-a_2b_1)c_1+(b_1c_2-b_2c_1)a_1+(c_1a_2-c_2a_1)b_1$
 $=a_1b_2c_1-a_2b_1c_1+a_1b_1c_2-a_1b_2c_2$
 $+a_2b_1c_1-a_1b_2c_2$
 $=0$
 y 成分 $\dots (a_1b_2-a_2b_1)c_2+(b_1c_2-b_2c_1)a_2+(c_1a_2-c_2a_1)b_2$
 $=a_1b_2c_2-a_2b_1c_2+a_2b_1c_2-a_2b_2c_1$
 $+a_2b_2c_1-a_1b_2c_2$
 $=0$
 $\therefore l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ となる。
(5) $\vec{a}=\vec{0}$ とすると $\{\vec{0}, \vec{b}\}=\vec{0} \times b_2-0 \times b_1=0 \therefore a \neq 0$ と仮定し、
 $\vec{a} \neq \vec{0}$ と仮定する。同様にして $\vec{b} \neq \vec{0}$ と仮定する。 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ とすると $b_1 \neq 0$
 $\therefore$ 存在して $b_1=k a_1, b_2=k a_2$ と仮定する。
 $\{\vec{a}, \vec{b}\}=a_1 \times k a_2 - a_2 \times k a_1 = 0$
 $\therefore a \neq 0$. $\therefore a$ と b は $l > 0$ と仮定する。
 $\therefore$ 任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は実数 p, q を用いて
 $\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}$
と表すことができる。
 $p \geq 0, q \geq 0$ とする。 $p=q, b=q, t=0$ とすればよい。
 $p < 0$ とする。
 $p\vec{a}=(-p) \times (-\vec{a})=(-\frac{p}{m}) \times (-m\vec{a})$
 $=(-\frac{p}{m}) \times (n\vec{b}+l\vec{c})$
 $=(-\frac{np}{m})\vec{b}+(-\frac{lp}{m})\vec{c}$
 $q < 0$ とする。
 $q\vec{b}=(-q) \times (-\vec{b})=(-\frac{q}{n}) \times (-n\vec{b})$
 $=(-\frac{q}{n}) \times (m\vec{a}+l\vec{c})$
 $=(-\frac{mq}{n})\vec{a}+(-\frac{lq}{n})\vec{c}$
とすればよい。 $l > 0, m > 0, n > 0$ と仮定する。

$$\begin{cases} p < 0 \Rightarrow -\frac{np}{m} > 0, -\frac{lp}{m} > 0 \\ q < 0 \Rightarrow -\frac{mq}{n} > 0, -\frac{lq}{n} > 0 \end{cases}$$

 $\therefore \vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}$ の右辺に任意のベクトル $\vec{d}$ を表すことができる。
と仮定する。

2

(1) $m=d \times m_1 \times m_2 \dots m_k$ は、その素因数分解に現れる素因数
 d の素因数分解に現れる素因数
 a の素因数分解に現れる素因数
 $m_1, m_2, \dots, m_k$ は d と互いに素な
 m の素因数である。

と(1)同様にして $n=d \times n_1 \times n_2 \dots n_l$ と表すことができる。

$\therefore a$ と b は

$$f(d) \times f(mn) = f(d) \times f(d^2 m_1 n_1 \times m_2 n_2)$$

$$= f(d) \times \{f(d) \times f(m_2 n_2)\}$$

$$= \{f(d)\}^2 \times f(m_2 n_2) \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$f(m) \times f(n) = f(d m_1 \times m_2) \times f(d n_1 \times n_2)$$

$$= f(d m_1) \times f(m_2) \times f(d n_1) \times f(n_2)$$

$$(m_1, n_1 \text{ は } d \text{ と互いに素})$$

$$= f(d) \times f(m_2) \times f(d) \times f(n_2)$$

$$= \{f(d)\}^2 \times f(m_2) \times f(n_2) \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

$\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2}$ より m_2 と n_2 は互いに素 ($\because d$ は素因数分解) と仮定する。
 $\therefore \{f(d)\}^2 \times f(m_2 n_2)$ と $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ は一致する。
 $\therefore f(d) f(mn) = f(m) f(n)$ となる。

(2) $f(mn) = f(m) f(n) \Leftrightarrow f(d) = 1 \Leftrightarrow d = 1$
 $\Leftrightarrow m$ と n は互いに素
 $(m=1 \text{ かつ } n=1 \text{ と含む})$

これを表すと m, n は $m < n$ と仮定する。

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2, 3, ..., 10								
2		1	3, 5, 7, 9							
3			1	4, 5, 7, 8, 10						
4				1	5, 7, 9					
5					1	6, 7, 8, 9				

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2, 3, ..., 10								
2		1	3, 5, 7, 9							
3			1	4, 5, 7, 8, 10						
4				1	5, 7, 9					
5					1	6, 7, 8, 9				

と31通りである

$\therefore$ 全55通り $2 \times 31 = 62$ 通り $m=n=1$ を追加した
63通りと仮定する。求める確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{63}{100}$$

$2 f(mn) = f(m) f(n) \Leftrightarrow f(d) = 2 \Leftrightarrow d = 2, 4 \text{ or } 8$
と仮定する。

$$\begin{cases} d=2 \Leftrightarrow (m, n) = (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), \\ (4, 2), (4, 6), (4, 10), (6, 2), (6, 4), \\ (6, 8), (6, 10), (8, 2), (8, 6), (8, 10), \\ (10, 2), (10, 4), (10, 6), (10, 8) \text{ 19通り} \\ d=4 \Leftrightarrow (m, n) = (4, 4), (4, 8), (8, 4) \text{ 3通り} \\ d=8 \Leftrightarrow (m, n) = (8, 8) \text{ 1通り} \end{cases}$$

$\therefore$ 求める確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{23}{100}$$

3

右上図より $m > 0$ と仮定する。

$m > 0$ と仮定する。

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow S_1 + S_3 = S_2 + S_3$$

$$\Leftrightarrow \int_a^{\beta} \{f(x) - mx\} dx$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = \frac{(b - a)^3}{6}$$

$$\Leftrightarrow \beta - \alpha = b - a$$

と仮定する。

$$\therefore -x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ かつ}$$

$$a = 1 - \sqrt{2}, b = 1 + \sqrt{2} \text{ と仮定する}$$

$$b - a = 2\sqrt{2} \text{ と仮定する}$$

$$-x^2 + 2x + 1 - mx$$

$$= -x^2 + (2 - m)x + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2 - m, \alpha\beta = -1$$

と仮定する。

$$(\beta - \alpha)^2 = (2 - m)^2 + 4$$

$\therefore$

$$(2 - m)^2 + 4 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (m - 2)^2 - 4 = m(m - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 4 \quad (\because m > 0)$$

